随机微分方程稳定性理论

胡宣达　编著





南京大学出版社

1986·南京

内 容 简 介

本书全面、系统地介绍了随机微分方程稳定性理论近二十多年来的主要成果。全书共分三篇。第一篇：Ляпунов直接法（共三章），主要介绍了以P.З.Хасьминский为首的苏联学者在这方面的主要成果。第二篇：比较方法（共二章），主要介绍以G.S.Ladde为首的美国学者自1973年以来在这方面取得的主要成果以及国内近几年来所做的一些工作。第三篇：其他（共一章），主要介绍目前随机微分方程稳定性理论发展中不够成熟并要进一步研究的一些问题。为方便读者，对每章所必需的预备知识都尽可能地作必要的回顾。

本书可作为高等学校数学、应用数学、自动控制、系统工程、经济管理以及其他有关专业的高年级学生、研究生的教学用书，也可供有关的科技工作者参考。

随机微分方程稳定性理论

胡宣达 编著

南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行　　国营练湖印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张12.1875 字数274千
1986年7月第1版　　1986年7月第1次印刷
印数 2 500

统一书号：13336·011 定价：3.00元
责任编辑 秦 涛

序

近二十余年来，由于科学技术的飞速发展，随机因素对系统的影响，日益受到人们的重视，从而作为概率论与常微分方程相结合发展而成的随机微分方程这一边缘学科，也得到了蓬勃发展。在这一边缘领域中，随机微分方程稳定性理论，在确定性常微分方程稳定性理论与随机过程理论的基础上发展特别迅猛，而且应用也越来越广泛。然而由于众所周知的原因，国内对随机微分方程稳定性理论的研究与应用，还是近几年的事。

为了适应我国四化建设的需要，並奢望对这一领域的理论与应用的研究，尽快赶上现今发展的潮流有所裨益，也为了尝试对随机微分方程稳定性理论的发展作一初步小结，以“抛砖引玉”。作者在1983年编写的研究生教材的基础上，吸收了各方面的意见，结合教学中的体会，补充了近期的文献资料，编写成此书。

全书内容分为三篇。第一篇，Ляпунов直接法。主要总结了以Хасьминский为首的苏联学者在这方面的主要成果。第二篇，比较方法。主要总结了以Ladde为首的美国学者自1973年以来所作的一系列工作以及国内近几年所做的一些工作。第三篇，其他。主要介绍目前随机微分方程稳定性理论发展中，不够成熟並需要进一步研究的一些问题。作为一个整体，全书的内容是连贯的，体例是一致的，然而这三部分内容又基本上是彼此独立的。对其兴趣于某一方面的

读者，可以仅读第一篇或第二篇，对于有这方面理论基础的读者，可直接阅读第三篇。即使在第一篇或第二篇中标有星号的部分，也有相对的独立性，跳过它们不损害全书的连贯。为了方便读者，对每章中所必需的预备知识尽可能作些概括性的回顾。此外，在各章末收集了与各章内容有关的参考文献，当然，这是十分挂一漏万的。

本书完稿后，承钟琪绵副教授仔细审阅并提出宝贵意见，作者深表感谢。并深切感谢王梓坤教授对本书写作给予的鼓励和支持。作者还衷心感谢南京大学出版社，对本书出版工作所给予的大力支持。

作者学识浅薄，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

胡宣达

1985年7月于南京大学

基本符号

E_l：l维欧氏空间

E^+_1：$E^+_1 \triangleq [0,\infty)$

$M_{(l-h)}$：E_l中包含原点的$(l-h)$维流形$(l>h)$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_l)$：1维（$l$维）欧氏空间中Borel集的$\sigma$代数

U_R（或$U(R)$）：$U_R \triangleq \{X: |X|<R, X\in E_l\}$

$\overline{U}_R$（或$\overline{U}(R)$）：$\overline{U}_R \triangleq \{X: |X|\leqslant R, X\in E_l\}$

U：E_l中一区域（有界或无界）

$\overline{U}$：U的闭包

∂U：U的边界

$U(Z,\rho)$：E_l中以Z为球心，ρ为半径的球

$\overline{U}(Z,\rho)$：$U(Z,\rho)$的闭包

I_T：$I_T \triangleq \{t: 0\leqslant t\leqslant T\}$

J：$J=[t_0, t_0+a]$，其中$t_0\in E^+_1$，a为正实数

I：$I=I_\infty$

E：$E=E_l\times I$

A'：集合A的余集

χ_A：集合A的示性函数

$X^T(A^T)$：向量X（矩阵A）的转置

A^*：矩阵A的相伴矩阵

$\mathrm{tr}A$：矩阵A的迹

$|\cdot|$（$\|\cdot\|$）：向量的模（矩阵的模）

L：在每有限区间上绝对可积函数$f(t)$的类（对于在每有限区间上几乎必然绝对可积的随机函数$f(t,\omega)$，亦以同样的符号$f\in L$表之）

C_1：关于X满足局部Lipschitz条件，关于t绝对连续的函数$V(X,t)$的类

C_0：属于C且满足全局Lipschitz条件的函数$V(X,t)$的类

$C_2(C_2(U))$：定义于E上（定义于U上），关于X二次连续可微且关于t一次连续可微函数$V(X,t)$的类

$C_2^0(U\times I)$：除$X=0$外，几乎处处关于$X(\in U)$二次连续可微，关于$t(\in I)$一次连续可微的函数$V(X,t)$的类

$C(U,G)$：从$U\to G$的连续函数类

$\mathscr{K}$：满足$\phi\in C[(0,\rho),E^+_1]$，$\phi(0)=0$且$\phi(u)$关于$u$是严格递增的函数$\phi$的类（这里$0<\rho\leqslant\infty$）

$v\mathscr{K}$：满足$b\in C[(0,\rho),E^+_1]$，$b(0)=0$且$b(u)$是严格递增的凸函数b的类

$\mathscr{C}\mathscr{K}$：满足：$a\in C[(0,\rho)\times E_1^+,E_1^+]$，$a(0,t)\equiv0$且$a(u,t)$对每$t\in E_1^+$关于$u$是严格递增的凹函数$a$的类

$\mathscr{P}\mathscr{K}(\mathscr{P}\mathscr{K}^*)$：满足：$b\in C[U(\rho),E_1^+](b\in C(E_l,E_1^+))$，$b(0)=0$，当$X\neq0$时$b(X)>0$的函数$b$的类

$L_W^p[\alpha,\beta](1\leqslant p<\infty)$：满足：$p\{\int_\alpha^\beta|f(t)|^p dt<\infty\}=1$的随机过程$f(t,w)$的类

$M_W^p[\alpha,\beta]$：满足：$f\in L_W^p[\alpha,\beta]$且$E\int_\alpha^\beta|f(t)|^p dt<\infty$的随机过程$f(t,\omega)$的类

绪　论

常微分方程在物理、工程技术、生物和经济等领域中的应用是众所周知的，然而随着科学技术的发展，要求对实际问题的描述愈来愈精确。因此，随机因素的影响就不能轻易地被忽略，于是对某些实际过程的分析也就有必要从通常的确定性观点转到随机的观点，从而对这些实际系统的描述，也就自然地从确定性的常微分方程转到随机常微分方程，简称**随机微分方程**(Random differential equations).

随机微分方程的研究，是随着随机过程理论与常微分方程理论的发展而迅速发展起来的。然而，早在随机过程的严格数学理论建立之前二十年，就已经提出了微分系统的随机积分问题。1902 年 Gibbs[1] 讨论了统计力学问题，研究了保守力学系统的 Hamilton-Jacobi 微分方程组的积分，初始状态是随机的，这是最早提出的随机微分方程问题。1908 年，Langevin[2] 在研究 Brown 运动时就得到形如

$$m\frac{dx}{dt}=-\beta x+y(t)$$

的微分方程。其中，x表液体微粒在某一方向的运动速度，$-\beta x$ 表介质对微粒的影响，即为摩擦力作用项，$y(t)$ 表介质中分子运动对微粒的碰撞构成的随机作用力。这种形式的方程称为 **Langevin 方程**.在具体的物理问题的研究中，虽然经常遇到 Langevin 方程，然而对它确切而又严格的数学描述，直到1951年 Itô发表了著名的 Itô型随机微分方程的论

文[3]之后才建立。此后，随机微分方程得到了很快的发展。

根据随机因素进入微分方程的不同方式，Syski[4] 在1967年将随机微分方程分为三大类。

（一）具有随机初始条件的随机微分方程

这是最简单的情形，即方程本身不受随机因素影响，而随机性仅出现于初始条件的情形。这在空间弹道分析问题中经常出现。

（二）具有随机作用项（非齐次项）的随机微分方程

例如

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)+y(t),\qquad x(t_0)=x_0.$$

如果外力是随机的，则 $y(t)$ 是一随机过程．Langevin方程便具此形式。然而当 $y(t)$ 为白噪声时，上述方程本身便无严格的数学意义，正如前述。为解决此矛盾，Itô于1951年首先提出Itô型随机微分方程：

$$dx(t)=b(x(t),t)dt+\sigma(x(t),t)dw(t),\quad x(t_0)=x_0.$$

其中 $w(t)$ 为Wiener过程，dx 为Itô意义下的随机微分。

Itô方程是目前随机微分方程研究的一个十分重要的方面，因为它的解过程是Markov过程，因此它对随机过程理论和控制理论的应用，都具有重大的意义。通常一般文献中以“Stochastic differential equations”指Itô型方程（仍译作随机微分方程）。

（三）具有随机系数的随机微分方程

一般如

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t),t,y(t,w)),\quad x(t_0)=x_0.$$

其中，$\{y(t,w),t\geqslant 0\}$ 为方程的随机系数，其是某个随机过程。这是三类方程中最为困难而且又与实际问题联系最多的

一类。这类方程最早是 Bergman[6] 于 1946 年在研究海洋中声音传播问题时，由于折射率的随机变化而提出的。当然 $\hat{I}$to 方程也可视为一类特殊的具有随机系数的随机微分方程．

上述的分类，仅仅是为了研究与叙述的方便，在实际问题中，一个方程往往可以是既属这一类，又属那一类，所以上面的分类法，只是指出随机因素进入微分方程的三种途径而已。

从数学上看，随机微分方程是介于微分方程与概率论之间的边缘分支，它是这两个数学分支互相渗透的结果，因此随机微分方程的研究领域是极其广阔的。在这些领域中，随机微分方程稳定性理论的研究，正如同确定性常微分方程稳定性理论的研究一样，是研究它的解的定性理论的一个重要方面，它无论对于基础理论的研究，还是应用技术的研究，都具有十分重要的意义。

在微分方程稳定性理论的研究中，Ляпунов 直接法（也称 Ляпунов 第二方法）是确定一般非线性系统稳定性的较为一般的方法，其特点是只要知道解的存在，而无需求出方程的解的条件下，来分析系统的稳定性。因为一般求非线性方程的解，通常是十分困难的，所以这种方法就显示出了它的极大优越性，从而它在常微分方程中发展特别迅速，並且已成为目前较为成熟的Ляпунов稳定性理论的一个重要组成部分．1959 年 Bertram[4] 等人，首先提出用 Ляпунов 稳定性的概念和方法来研究随机微分方程解的稳定性；随后，主要由于美国的 Bucy, Kushner, Kozin 等以及苏联的 Гихман，Хасьминский 等人的努力，随机 Ляпунов 稳定性理论亦得到了较为迅速的发展。我们将在本书的第一篇中介绍这方面的理论。

比较方法是常微分方程稳定性理论中的一个十分重要且行之有效的方法。它是Ляпунов函数概念与微分不等式理论相结合的结果，其特点是通过引进一个一阶（或低阶）的辅助系统，在相当弱的条件下，利用微分不等式来建立沿所考察的（高阶）系统解轨道的Ляпунов函数与辅助系统的解之间的比较关系式，这就是所谓**比较定理**。通过比较定理，在一定的条件下，根据一阶（或低阶）辅助系统解的某种定性性质，就可推得所考察的(高阶)系统解的相应的定性性质，这就是所谓**比较准则**。关于比较方法在随机微分系统中的推广，主要是Ladde等人，自1973年以来所作的一系列工作开始的，他们将常微中的比较方法推广到随机微分系统，并用来研究随机泛函微分方程以及Itô方程解的稳定性与有界性。在他们工作的基础上，国内近几年来也在这方面作了些工作。我们将在本书的第二篇中介绍这方面的理论和结果。

在确定性系统的稳定性理论中，有一种称之为**简化原理**的方法，它是研究临界情形稳定性的基础。该原理使得我们有可能对一个$(l+m)$维系统的解$X(t)$,$Y(t)$的稳定性研究，化简为如下两个系统的稳定性的研究，一个是向量$X(t)$的首次近似的l维系统（此近似式的系数均假设为与Y无关）；另一个是通过在对Y的方程中置$X=0$而得到的m维系统（见Malkin[7]）.简化原理在随机微分系统中的推广，这方面的工作至今还不多，我们将在本书的第三篇中加以介绍。另外，我们还将在第三篇中讨论随机微分方程稳定性理论中的某些问题，例如，由首次近似决定的稳定性与不稳定性，等等。

随机微分方程理论，在近几年来已由Curtain[8]等人将

其推广到无穷维情形，其部分原因是由于较广泛的一类随机偏微分方程和滞后微分方程，可由无穷维的随机微分方程，利用半群或发展算子来描述．关于 Hilbert 空间中的随机微分方程的稳定性理论，近几年来由于 Haussman, Zabczyk 以及 Ichikawa 等人的努力，也得到了较快的发展。由于篇幅关系，关于这方面的内容，我们就不准备在本书中介绍了。

参考文献

1 Gibbs, J.W. Elementary principles in statistical mechanics New Haven Yale Univ.Press (1902).

2 Langevin,P. Sur la theore du mouvement Brownien , C.R. Acad.Sci. Paris. V.146. 530-533 (1908).

3 Itô ,K. On stochastic differential equations , Mem. Amer. Math.Soc. no.4 (1951) .

4 Syski ,R . Stochastic differential equations . In "Moden non-linear equations " (Saaty ,T.L. ed.) McGraw-Hill (1967) .

5 Bergman ,P.G. Propagation of radiation in a medium with radom inhomogeneities . Phy. Rev. V.70. 486-489 (1946) .

6 Bertram, L.E. and Sarachik ,P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters . IRE.Trans. Circuit Theory CT-6 . Special supplement 260-270 (1959) .

7 Malkin , I.G. Theory of stability of motion , 2nd Rev. edn. " Nauka " , Moscow . (1966) .

8 Curtain , R.F. Stochastic differential equation in Hilbert space . J.Differential equations 10 (1971)412-430 .

第 一 篇

Ляпунов 直接法

目　　录

第二篇 比较方法

第三篇　其　　他

6　随机微分方程稳定性理论中的一些问题

1

系数为一般随机过程的微分方程的有界性与稳定性

*§1·1 有关概率论知识的回顾

为了便于应用，我们先对本章所要用到的概率论中的一些基本概念和结果加以概略的回顾。

一、概率空间

样本空间（或基本事件空间）：$\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 称为**样本点或基本事件**。

称 Ω 的子集类 $\mathfrak{A}$ 为一个 **σ 代数**，如果

(1) $\Omega\in\mathfrak{A}$。

(2) 若 $A\in\mathfrak{A}$，则 $A'\in\mathfrak{A}$(其中 A' 记为 A 的余)。

(3) 若 $A_n\in\mathfrak{A}, n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ 中的集均称为**随机事件**，故 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 又称为**事件体**。

定义在 $\mathfrak{A}$ 上的一个非负、可列可加並使得 $P(\Omega)=1$ 的集函数 P，称为**一个概率测度**。于是将样本空间 Ω，Ω 子集的 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 及定义在 $\mathfrak{A}$ 上的概率测度 P，三者联系起来构成的三元组：$(\Omega,\mathfrak{A},P)$ 称为**概率空间**，其描述了某个统计试

验，也是我们今后讨论问题的前提。

称概率测度P在$\mathfrak{A}$上是**完全的**(**或完备的**)，如果$A\in\mathfrak{A}$，$P(A)=0$，$B\subset A$，则$B\in\mathfrak{A}$，因而$P(B)$必等于0。本书中，为了避免许多繁琐的关于零测集的子集的说明，总假设P为一完全概率测度，因而$(\Omega,\mathfrak{A},P)$为一完全概率空间。

二、概率测度的一些基本性质

(1) 单调性。如$A\in\mathfrak{A}$，$B\in\mathfrak{A}$，$A\subset B$，则$P(A)\leqslant P(B)$。

(2) 可列半可加性。对于$\mathfrak{A}$中的任意有限或可列序列A_n，有$P(\bigcup_n A_n)\leqslant\sum_n P(A_n)$。

(3) 下连续性。如$A_n\in\mathfrak{A}, n=1,2,\cdots$，且$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$，则$P(\bigcup_n A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$。

(4) 上连续性。如$A_n\in\mathfrak{A}, n=1,2,\cdots$，且$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$，则$P(\bigcap_n A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$。

三、随机变量及其分布与期望

Ω上的一个$\mathfrak{A}$可测且几乎处处有限的函数$\xi(\omega)$，称为**随机变量**。

本书中，我们仅考虑在l维欧氏空间E_l中取值的随机变量，即$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_l(\omega))^T$为$E_l(l=1,2,\cdots)$中的一个向量。

一个向量值的随机变量$\xi(\omega)$可以它的联合分布函数：$F(x_1,x_2,\cdots,x_l)=P(\{\omega:\xi_1(\omega)<x_1,\cdots,\xi_l(\omega)<x_l\})$来确定。

随机变量$\xi(\omega)$的期望，定义为积分

$$E\xi=\int_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega).$$

只要函数 $|\xi(\omega)|$ 是可积的。

给定任一向量 $X\in E_l$ 或一个 $k\times l$ 矩阵 $\sigma=(\sigma_{ij})$ $(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,l)$，通常我们记

$$|X|=(x_1^2+\cdots+x_l^2)^{\frac{1}{2}};\qquad \|\sigma\|=(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sigma_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

于是有不等式

$$|\sigma X|\leqslant\|\sigma\|\cdot|X|;\quad \|\sigma_1\cdot\sigma_2\|\leqslant\|\sigma_1\|\cdot\|\sigma_2\|.$$

四、随机过程

设 $T\subset E_1$ 是已给的实数集，有穷或无穷、可列或不可列均可，若对每一 $t\in T$，就对应一个定义在 $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ P)$ 上的随机变量 $\xi(t,\omega)$，则称随机变量族 $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$ 为 $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ 上的一个**随机过程**。对固定的 $\omega\in\Omega$，我们称函数 $\xi(t,\omega)$ 为此随机过程的一条**样本轨道**或一个**样本函数**。

1．可测随机过程

记 $\mathscr{B}$ 为闭区间 $T=[a,b]$ 的 Borel 子集的 σ 代数，$\mathscr{B}\times\mathfrak{A}$ 表 $\mathscr{B}$ 与 $\mathfrak{A}$ 的乘积 σ 代数。

$(\Omega,\mathfrak{A},P)$ 上的过程 $\{\xi(t,\omega),t\in[a,b]\}$ 是称为**可测**的，如果 $\xi(t,\omega)$ 是 $\mathscr{B}\times\mathfrak{A}$ 可测的。

2．可分随机过程

过程 $\{\xi(t,\omega)t\in T\}$ 是称为**可分的**，如果对于 T 的某个可列稠密子集 R，存在一个零测集 N，使得对于每闭子集 $A\subset E_l$ 和每开子集 $I\subset T$，有

$$\{\omega:\xi(t_j,\ \omega)\in A,t_j\in IR\}\subset N\cup\{\omega:\xi(t,\omega)\in A,\ \ t\in I\}$$

此时，称 R 为过程的**可分集**；N 称为**例外集**。

3. 过程的随机连续性

过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$，在点$s\in T$是称为**随机连续**的，如果对每$\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{t\to s}P(|\xi(t,\omega)-\xi(s,\omega)|>\varepsilon)=0$。亦即当$t\to s$时，$\xi(t,\omega)\xrightarrow{P}\xi(s,\omega)$．如果将上式中的"$t\to s$"换为"$t\uparrow s$"（或"$t\downarrow s$"），则称过程为**左（或右）随机连续**。

4. 过程的样本函数连续性

称过程$\{\xi(t,\omega),t\subset(a,b)\}$的样本函数在$(a,b)$上是以**概率1连续**的，如果

$$P(\bigcup_{t\in(a,b)}\{\omega:\lim_{h\to 0}[|\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)|]\neq 0\})=0。$$

如果过程在(a,b)上是样本函数概率1连续的，且在端点a,b有单边的样本函数概率1连续性，则称此过程在$[a,b]$上是样本函数概率1连续的。

5. 有关的一些定理

定理1.1* 每个随机连续的过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$，除去T的一个可列子集外，存在一个可分可测过程$\tilde{\xi}(t,\omega)$，使得对每个$t\in T$，有

$$P(\{\xi(t,\omega)=\tilde{\xi}(t,\omega)\})=1。$$

定理1.2** 如果$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$是一个可测过程，则对固定的ω，函数$\xi(t,\omega)$作为t的函数是几乎必然Lebesgue可测的，进而，如果$E\xi(t,\omega)=m(t)$存在，则$m(t)$是Lebesgue可测的，且有

$$\int_A E|\xi(t,\omega)|dt<\infty,$$

其意味着过程$\xi(t,\omega)$在A上是几乎必然可积的。

---

*见[2]的定理2.2.6

**见[2]的定理2.2.7

设 $\mathscr{M}\times P$ 为定义在乘积 σ 代数 $\mathscr{B}\times\mathfrak{A}$ 上的乘积测度，其中 $\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{B}$ 上的 Lobesgue 测度.

如果对于 $(t,\ \omega)\in A$，且，$(\mathscr{M}\times P)(A')=0$ 的某个关系式成立，则称此关系式为关于几乎所有的 $(t,\ \omega)$ 成立，并记为 $a.e.(\mathscr{M}\times P)$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 E_t 中的 Borel 集，且 $t_1,t_2,\cdots,\ t_n\in T$. 则过程 $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$ 的 n 维分布为

$$P(t_1,\cdots,t_n;A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

$$=P(\xi(t,\omega)\in A_1,\xi(t_2,\omega)\in A_2,\cdots,\xi(t_n,\omega)\in A_n),$$

从而有下面重要的 Колмогоров 存在定理.

定理1.3 设已给满足相容性条件的有穷维分布族：

$$\mathscr{P}=\{P(t_1,\cdots,t_n;A_1,\cdots,A_n),n\geqslant 1,t_i\in T\},$$

则必存在一个概率空间 $(\Omega,\mathfrak{A},P)$及定义于其上的一个随机过程 $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$，使其具有所给的有穷维分布族$\mathscr{P}$.

定理1.4 设 $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$ 为满足下列条件的可分过程：存在三个数 $\alpha>0,\beta>0,k\geqslant 0$ 使得对任意的 $t_1,\ t_2\in T$，有$E|\xi(t_2,\omega)-\xi(t_1,\omega)|^{\alpha}\leqslant|t_1-t_2|^{1+\beta}$，则此过程的样本函数以概率 1 连续.

过程 $\{\xi(t,\omega),t\geqslant t_0\}$ 是称为满足**大数律的**，如果对每 $\varepsilon>0,\delta>0$,存在一个 $T>0$，使得对于所有的$t>T$，有

$$P\left(\left|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\xi(s,\omega)ds-\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}E\xi(s,\omega)ds\right|>\delta\right)<\varepsilon$$

过程 $\{\xi(t,\ \omega),\ t\geqslant t_0\}$ 是称为满足**强大数律的**，如果

$$P\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\xi(s,\omega)ds-\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}E\xi(s,\omega)ds\xrightarrow[t\to\infty]{}0\right)=1.$$

随机过程最重要的特征是它的期望 $m(t)=E\xi(t,\omega)$ 和协

方差矩阵

$$K(s,t)=\operatorname{cov}(\xi(s),\xi(t))$$
$$=(E(\xi_i(s)-m_i(s))(\xi_j(t)-m_j(t))).$$

特别，一个 Gauss 过程的所有有限维分布，可由函数 $m(t)$ 和 $K(s,t)$ 唯一确定。

一个 Gauss 过程是平稳的，如果

$$m(t)=Const, \qquad K(s,t)=K(t-s). \qquad (*)$$

一般称满足（*）式的过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$为**广义平稳的**。此外，矩阵 $K(\tau)$ 的 Fourier 变换称为过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$的**谱密度**。显然，如果函数 $\|K(\tau)\|$ 绝对可积，则谱密度 $f(\lambda)$ 存在且有界。

§1·2 微分方程耗散系统

在本节中，我们从微分方程理论来证明以后需要用到的一些定理。为此我们先引进一些符号与定义。

一、符号与定义

记 $I_T\triangleq\{t: 0\leqslant t\leqslant T\}$，$I=I_\infty$，$E=E_l\times I$，

$U_R\triangleq\{X: |X|<R, X\in E_l\}$，$U'_R$ 为 U_R 的余。

设 $f(t)$ 是一个定义在 I 上的函数，如果 $f(t)$ 在每个有限区间上是绝对可积的，则称 $f(t)$ 属于函数类 L，并记为 $f\in L$。对于在每有限区间上是几乎必然绝对可积的随机函数 $f(t,\omega)$，我们以同样的符号 $f\in L$ 表之。设

$$F(X,t)=(F_1(X,t),\cdots,F_l(X,t))^T,\quad (X,t)\in E$$

是一个 Borel 可测函数。对于 $F(X,t)$，假设对每个$R>0$，存在函数 $M_R(t)\in L$ 和 $B_R(t)\in L$，使得

$$|F(X,t)|\leqslant M_B(t), \tag{1.1}$$

$$|F(X_2,t)-F(X_1,t)|\leqslant B_B(t)|X_2-X_1|, \tag{1.2}$$

$$\text{对于}\quad X,X_i\in U_B,(i=1,2)$$

条件(1.1)称为**局部有界条件**，(1.2)称为**局部 Lipschitz 条件**.

考虑初值问题

$$\frac{dX}{dt}=F(X,t),\quad X(t_0)=X_0,\ (t_0\geqslant 0). \tag{1.3}$$

定义1.1 函数$X(t)$是称为初值问题(1.3)在区间$[t_0,t_1]$上的一个解，如果它满足

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(X(s),s)ds,\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{1.4}$$

为了考虑变初始条件下的解,我们记 $X(t)$ 为 $X(t;X_0,\ t_0)$。显然函数 $X(t)$ 是绝对连续的，並且在$F(X,t)$的所有连续点处，它满足(1.3)中的方程。

二、解的延拓性

定义 1.2 设 $X(t)$ 为问题(1.3)在 I_{t1} 上的一个解，若存在问题(1.3)的另一个解$\tilde{X}(t)$,它在 I_{t2}上有定义且满足

(i) $I_{t2}\supset I_{t1}$， 但 $I_{t2}\neq I_{t1}$,

(ii) $\tilde{X}(t)\equiv X(t),t\in I_{t1}$.

则称解$X(t),t\in I_{t1}$是**可延拓的**，並称$\tilde{X}(t)$是$X(t)$在I_{t1}上的一个**延拓**；反之，若不存在满足上述条件的解$\tilde{X}(t)$，则称$X(t)$，$t\in I_{t1}$是(1.3)的一个**饱和解**,且I_{t1}称为解$X(t)$的**最大存在区间**。

定理1.5 如果条件(1.1)和(1.2)满足，则问题(1.3)

的解 $X(t)$ 在 t_0 的某个邻域内存在、唯一。进而，假设对每解$X(t)$（如果存在）和某个满足当 $R\to\infty$ 时趋于无穷的函数 τ_R，有下面的"验前估计"：

$$\inf\{t: t\geqslant t_0; \ |X(t)|>R\}\geqslant\tau_R. \tag{1.5}$$

则问题 (1.3) 的解，对于所有的 $t\geqslant t_0$ 存在并且是唯一的（即此解对于 $t\geqslant t_0$ 可无限延拓）。

【证明】 不失一般性，我们可假设 (1.1) 中的函数 $M_R(t)$ 满足不等式

$$|M_R(t)|>1, \tag{1.6}$$

于是我们可找到数 R 和 $t_1>t_0$，使得$|X_0|\leqslant R/2$，且

$$\phi(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}M_R(s)ds\exp\{\int_{t_0}^{t_1}B_R(s)ds\}=\frac{R}{2}. \tag{1.7}$$

利用在区间$[t_0,t_1]$上，对方程 (1.4) 的逐次逼近法，有

$$X^{(n+1)}(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}F(X^n(s),s)ds,\ X_0(t)\equiv0,$$

并利用 (1.1)，(1.2) 和 (1.7)，我们得到估计：

$$|X^{(1)}(t)-X_0|\leqslant\int_{t_0}^{t}M_R(s)ds\leqslant\frac{R}{2},$$

$$|X^{(n+1)}(t)-X^{(n)}(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}B_R(s)|X^{(n)}(s)-X^{(n-1)}(s)|ds.$$

结合(1.7)，我们有

$$|X^{(n+1)}(t)-X^{(n)}(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}M_R(s)ds\frac{[\int_{t_0}^{t}B_R(s)ds]^n}{n!}. \tag{1.8}$$

由(1.8)推得，$\lim_{n\to\infty}X^{(n)}(t)$存在且满足方程(1.4)．唯一性证明类似。

现在证明延拓性，考虑任一$T>t_1$，选择一个R，除了使得关系式$|X_0|\leqslant\frac{R}{2}$和(1.7)式成立外，还使得$\tau_{R/2}>T$．则由(1.5)推得$|X(t_1)|\leqslant R/2$，因此，此解可延拓到点$t_2$，並使得$\phi(t_1,t_2)=R/2$，重复这一程序．因为函数$M_R(t)$和$B_R(t)$在每有限区间上是可积的，于是总存在某个$n$，使得$t_n\geqslant T$． ∎

〔注〕 (1)如果函数$M_R(t)$与t无关且它关于R，至多是线性增长的，即

$$|F(X,t)|\leqslant C_1|X|+C_2, \tag{1.9}$$

于是我们得到问题(1.3)的解的下列估计，

$$|X(t)|\leqslant|X_0|C_3\exp(C_1(t-t_0)),\quad t\geqslant t_0,$$

其中C_3为某个正常数．

由于后面我们将证明比这更一般的结果，故此估计的证明在此不再赘述．

(2)如果条件(1.9)不成立，则此解一般具有有限逸时*．例如，考虑一阶非线性微分方程，

$$\frac{dx}{dt}=x^2,\qquad x(0)=1.$$

显然，$F(x)$不满足条件(1.9)，而此问题的解为

$$x(t)=\frac{1}{1-t},\qquad 故当t\to1时,\qquad x(t)\to\infty.$$

它表明方程由(1,0)出发的解，不可能在$t\geqslant0$上延拓，除非状态$x(t;\ 1,\ 0)$，有一个从$+\infty$到$-\infty$的“跳跃”，显然这不是动力系统的工作方式．

因为条件(1.9)在很多重要的实际情形是不成立的，所以我们需要寻求解可无限延拓的更一般的条件．为此，我们

* 如果微分方程的解在有限时间内要跑到无穷，则称此方程的解具有有限逸时(finite escape time)．

先引进下面的算子：

$$\frac{d^0}{dt}V(X,t)$$

$$\triangleq \limsup_{h\to 0+}\frac{1}{h}[V(X(t+h;X,t),t+h)-V(X,t)] \tag{1.10}$$

算子 d^0/dt 称为(1.3)中方程的相伴Ляпунов算子。(1.10)中的 $X(t+h;X,t)$ 为(1.3)中方程从 (X,t) 出发的解。

显然，如果$V(X,t)$关于 X 和 t 连续可微，则对几乎所有的 t，有

$$\frac{d^0}{dt}V=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial x_i}F_i(X,t)=\frac{\partial X}{\partial t}+[\frac{\partial}{\partial X}V,F]. \tag{1.11}$$

它是函数 V 沿系统 (1.3) 的轨道对 t 的全导数。

Ляпунов 在他的经典著作《稳定性的一般问题》[4]中提出了两类方法。第一类方法是归结为把一般解表示成某种级数的形式，所有这类方法，称为Ляпунов **第一方法**。第二类方法是归结为寻找使得 d^0V/dt 满足一定的不等式的非负函数$V(X,t)$，所有这类方法，称为Ляпунов **第二方法** 或**直接法**。函数 V 就称为 Ляпунов **函数**。本篇的目的就是利用Ляпунов直接法来分析随机系统的稳定性。在本节与下一节中，我们将利用 Ляпунов 函数来寻求一个解对于 $t>0$可无限延拓的条件。为此，我们对所考虑的Ляпунов函数：$V(X,t)$，$(X,t)\in U_R\times I_T$ 作出下列假设：

(1) 关于 t，对 U_R 中的 X是一致绝对连续的。此条件，在今后的讨论中总假设是成立的。

(2) 在 $U_R \times I_T$ 中，它满足关于 X 的 Lipschitz 条件

$$|V(X_2,t)-V(X_1,t)| \leqslant B|X_2-X_1|, \tag{1.12}$$

其中 Lipschitz 常数 B 一般依赖于 R 和 T。

为了方便起见，记条件 (2) 为 $V \in C$。如果函数 V 满足条件(1.12)，但常数 B 不依赖于 R 和 T，此时记为 $V \in C_0$.

如果 $V \in C$ 並且函数 $Y(t)$ 绝对连续，则容易验证函数 $V(Y(t),t)$ 也绝对连续。因此，对于几乎所有的 t 有

$$\frac{d^0V(X,t)}{dt} = \frac{d}{dt}V(X(t),t)\Big|_{X(t)=X},$$

其中 $X(t)$ 为 (1.3) 中方程的解。以后我们将经常利用这一事实。

为了建立更一般条件的延拓定理，我们先证明下面的引理。

引理1.6 设函数 $Y(t)$，对于 $t \geqslant t_0$ 绝对连续且 $\frac{dY}{dt}$ 满足不等式

$$dY/dt < A(t)Y + B(t), \text{ 对于几乎所有的 } t \geqslant t_0, \tag{1.13}$$

其中 $A(t)$ 与 $B(t)$ 均为几乎处处连续，且在每有限区间上可积的函数，则对于 $t > t_0$，有

$$Y(t) < Y(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right\} + \int_{t_0}^{t} \exp\left\{\int_{s}^{t} A(u)du\right\} B(s)ds. \tag{1.14}$$

【证明】 由 (1.13) 推得，对于几乎所有 $t \geqslant t_0$，有

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right\}\right] < B(t)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right\}$$

积分此不等式即得(1.14). ∎

定理1.7 假设存在一个定义在$E_l\times\{t>t_0\}$上的Ляпунов函数$V\in C$，使得对于某个$C_1>0$，有

$$V_R=\inf_{(X,t)\in U'_R\times\{t>t_0\}}V(X,t)\longrightarrow\infty，当 R\to\infty时. \quad (1.15)$$

$$d^0V/dt\leqslant C_1V. \quad (1.16)$$

并且(1.3)的右端函数F满足条件(1.1)，(1.2)，则问题(1.3)的解，对于$t\geqslant t_0$可无限延拓。

【证明】 由(1.16)推得，对几乎所有的t，有

$$dV(X(t),t)/dt\leqslant C_1V(X(t),t).$$

再由引理1.6有

$$V(X(t),t)\leqslant V(X_0,t_0)\exp\{C_1(t-t_0)\}.$$

如果以τ_R记为方程

$$V(X_0,t_0)\exp\{C_1(\tau_R-t_0)\}=V_R$$

的一个解，则条件(1.5)显然满足，从而定理1.5的所有条件均满足，于是定理成立。 ▌

三、解的有界性

下面讨论在什么条件下，方程(1.3)的解，对于$t>0$是有界的。为此，我们先引进有界性的概念。

定义1.3 系统(1.3)，对于$t>0$是称为**耗散**的，如果对每$r>0$，$t_0>0$，存在一个正数$R>0$和$T=T(r,t_0)$使当$|X_0|<r$时，就有$|X(t;X_0,t_0)|<R$，$t>t_0+T$. 其中$X(t;X_0,t_0)$为问题(1.3)的解。

Yoshizawa[5]称这种有界性为(拟)**等度终归有界**的。

下面介绍Yoshizawa[5]关于耗散系统的一个充分条件，即定理1.8。

定理1.8 系统 (1.3) 是耗散的一个充分条件是在 E 上存在一个满足下列条件的非负Ляпунов函数 $V(X,t)\in C$：

$$V_R=\inf_{(X,t)\in U'_R\times}V(X,t)\longrightarrow\infty,\text{当}R\to\infty\text{时。}\tag{1.17}$$

$$d^0V/dt<-CV.\qquad (C\text{为一个正常数})\tag{1.18}$$

【证明】 由引理 1.6 和 (1.18) 推得 $t>t_0$，$X\in U_r$，有

$$V(X(t),t)\leqslant V(X_0,t_0)e^{-C(t-t_0)}\leqslant e^{-C(t-t_0)}\sup_{|X_0|<r}V(X_0,t_0).$$

于是存在一个 $T(r,t_0)\geqslant t_0$，使当 $t>T(r,t_0)$ 时，有 $V(X(t),t)<1$。此不等式与 (1.17) 即意味着定理的结论成立。

〔注〕：(1) 该定理的逆定理也是正确的。Yoshizawa[5]证明了对于每个耗散系统必存在一个具有性质(1.17)，(1.18)的非负函数 V，只要 $F(x,t)$ 在 E 的每个有界子集上满足Lipschitz条件。

(2) 易证，如果只假设对某 $R>0$，在区域 U'_R 中，(1.18) 成立 並且在 U_R 中函数V和 d^0V/dt 均为上有界的，则定理 1.8 的结论仍然成立

事实上，只要利用引理 1.6 于不等式

$$d^0V/dt<-CV+C_1$$

即可。此不等式在上面的假设下，对于某个正常数 C_1 和 $(X,t)\in E$ 是正确的。

作为本节的结束，我们介绍一个以后经常要用到的一个估计式，它的证明在一般常微分方程教程中均可找到，例如Bellman[6]。

Gronwall-Bellman引理 设 $U(t),V(t)$ 为非负函数，且 k 为一正常数，使对 $t\geqslant s$，有

$$U(t)\leqslant k+\int_s^t U(t_1)V(t_1)dt_1,$$

则对于 $t \geqslant s$，有

$$U(t) \leqslant k \exp\left(\int_s^t V(t_1)dt_1\right).$$

§1.3 作为微分方程解的随机过程

一、一般情形

假设(1) $\{\xi(t,\omega),\ t\geqslant 0\}$ 为一个取值于 E_k 的可分可测随机过程。

(2) $G(X,t,Z)(X\in E_l, t\geqslant 0, Z\in E_k)$ 是一个满足下列条件的 (X,t,Z) 的 Borel可测函数。

(i)存在一个随机过程 $B(t,\omega)\in L_1$，使得对于所有的 $X_i\in E_l$, $i=1,2$, 有

$$|G(X_2,t,\xi(t,\omega))-G(X_1,t,\xi(t,\omega))| \leqslant B(t,\omega)|X_2-X_1|. \tag{1.19}$$

(ii) 过程 $G(0,t,\xi(t,\omega))\in L_1$ 即对每一 $T>0$，有

$$P\left\{\int_0^T |G(0,t,\xi(t,\omega))|dt<\infty\right\}=1. \tag{1.20}$$

现在我们要证明，在这些假设下，下述初值问题(1.21)在 E_l 中，对于 $t\geqslant t_0$，定义了一个新的随机过程。

$$\frac{dX}{dt}=G(X,t,\xi(t,\omega)),\quad X(t_0)=X_0(\omega). \tag{1.21}$$

定理1.9 如果条件(1.19),(1.20)满足，则初值问题(1.21)有唯一解 $X(t,\omega)$（在概率1意义下），它确定了一个随机过程，此过程几乎所有的样本函数，对于 $t\geqslant t_0$ 是绝对连续的。此外，对每一 $t\geqslant t_0$，有估计

$$|X(t,\omega)-X_0(\omega)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))|ds$$

$$\times\exp\left\{\int_{t_0}^{t}B(s,\omega)ds\right\},\ a.s.\qquad(1.22)$$

证明类似于定理 1.5。

〔注〕 以后为了方便起见，常称样本函数以概率 1 连续，简称样本函数连续．类似地，以概率 1 唯一亦简称唯一，等等．读者自明之．

例1.1 考虑线性系统

$$\frac{dX}{dt}=A(t,\omega)X+b(t,\omega),\qquad X(0)=X_0(\omega).$$

如果 $\|A(t,\omega)\|$, $|b(t,\omega)|\in L$, 则由定理 1.9 推得此初值问题存在唯一的解过程，它的样本函数对于所有 $t>0$ 连续。

值得注意的是在很多重要的应用中，全局 Lipschitz 条件(1.19)一般是不成立的，经常能够满足的是下面的局部 Lipschitz条件：

对每一 $R>0$，存在一个随机过程 $B_R(t,\omega)\in L$，使对 $X_i\in U_R, i=1,2$，有

$$|G(X_2,t,\xi(t,\omega))-G(X_1,t,\xi(t,\omega))|$$
$$\leqslant B_R(t,\omega)|X_2-X_1|.\qquad(1.23)$$

正如我们在 §2 的例子中所看到的，局部 Lipschitz 条件(1.23)，不能防止样本函数具有有限逸时，即使在确定性情形，情况也是如此，然而我们有下面的定理，它是定理 1.5的直接推论。

定理1.10 如果条件(1.20)与(1.23)满足，並假设存在随机变量族$\{\tau(R,\omega)\}$满足

(i) $\tau(R,\omega)\uparrow\infty$, $a.s.$ 当$R\to\infty$时。

(ii) $\inf\{t: |X(t,\omega)| \geqslant R\} \geqslant \tau(R,\omega), a.s.$ (1.24)

其中$X(t,\omega)$为初值问题(1.21)的解过程。

则初值问题 (1.21) 的解是唯一的，並且对于 $t \geqslant t_0$，它确定了一个样本函数绝对连续的随机过程 (即此解对于 $t \geqslant t_0$ 可无限延拓)。

二、线性相依情形

假设 (1.21) 中的函数G，线性地依赖于第三个变数，即考虑初值问题

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t) + \sigma(X,t)\xi(t,\omega), \quad X(t_0,\omega) = X_0(\omega). \tag{1.25}$$

其中，σ是一个$l \times k$矩阵，ξ是E_k中的向量。

下面我们要证明，如果它的截尾系统

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t) \tag{1.26}$$

存在一个满足一定条件的 Ляпунов 函数，则初值问题(1.25)的解可无限延拓。

为此，记 $d^{(1)}/dt$ 为系统 (1.25) 的 Ляпунов 算子，对于系统(1.26)的Ляпунов算子，仍保留符号d^0/dt。

为了证明初值问题(1.25)的解过程的存在延拓定理，我们需要下面的引理。

引理1.11 如果$V(X,t) \in C_0$，则对于几乎所有的 t，有

$$\frac{d^{(1)}V(X,t)}{dt} \leqslant \frac{d^0V(X,t)}{dt} + B\|\sigma(X,t)\| \cdot |\xi(t,\omega)|, a.s. \tag{1.27}$$

其中B是条件(1.12)中的常数。

【证明】 容易验证，具有初始条件 $X(t) = X$ 的方程

(1.25)和(1.26)的解之间的差：$X(t+h,\omega;X,t)-X(t+h;X,t)$ 对于几乎所有的 t，ω，下列不等式成立：

$$|X(t+h,\omega;X,t)-X(t+h;X,t)|$$
$$\leqslant h\|\sigma(X,t)\|\cdot|\xi(t,\omega)|+o(h),\quad (h\to 0).$$

于是我们有

$$\frac{d^{(\cdot)}V(X,t)}{dt}-\frac{d^0V(X,t)}{dt}$$

$$\leqslant \varlimsup_{h\to 0} \sup\frac{1}{h}|V(X(t+h,\omega;\cdots,\cdot))-V(X(t+h;X,t))|$$

（由(1.12)）

$$\leqslant \varlimsup_{h\to 0+} \sup\frac{1}{h}B|X(t+h,\omega;X,t)-X(t+h;X,t)|$$

$$\leqslant \varlimsup_{h\to 0+} \sup\frac{1}{h}[Bh\|\sigma(X,t)\|\cdot|\xi(t,\omega)|+o(h)]$$

$$=B\|\sigma(X,t)\|\cdot|\xi(t,\omega)|.a.s.$$

定理1.12 对于初值问题(1.25)，假设

(i) 过程 $\xi(t,\omega)\in L$，F，σ 满足局部 Lipschitz 条件 (1.12)，$F(0,t)\in L$，并且

$$\sup_{E_t\times(t>t_0)}\|\sigma(X,t)\|<C_2. \tag{1.28}$$

(ii) 假设系统 (1.26)存在一个 Ляпунов 函数 $V(X,t)\in C_0$，并且满足下列条件：

$$V_R=\inf_{U'_R\times(t>t_0)} V(X,t)\longrightarrow\infty,\ 当R\to\infty时。\tag{1.29}$$

$$\frac{d^0V}{dt}<C_1V,\ (C_1>0). \tag{1.30}$$

则初值问题(1.25)的解存在，并且对于所有 $t\geqslant t_0$ 它确定了一

个样本函数绝对连续的随机过程。

【证明】 容易表明在定理的假设下，定理1.10的条件满足．事实上，因为条件(1.20)和(1.23)显然满足，所以只要证明(1.24)成立即可。设$X(t,\omega)$为初值问题(1.25)的一个解，由定理的假设和引理1.11，函数$V(X(t,\omega),t)$是绝对连续的，並且对于几乎所有的t，ω有

$$\frac{d^{(1)}V(X(t,\omega),t)}{dt}\leqslant\frac{d^0V(X(t,\omega),t)}{dt}$$

$$+B\|\sigma(X(t,\omega),t)\|\cdot|\xi(t,\omega)| \text{（由(1.28),(1.30)）}$$

$$\leqslant C_1V(X(t,\omega),t)+BC_2|\xi(t,\omega)|$$

由引理1.6，有

$$V(X(t,\omega),t)\leqslant e^{C_1(\tau-t_0)}[V(X_0(\omega),t_0)$$

$$+BC_2\int_{t_0}^{t}|\xi(s,\omega)|ds],\ a.s. \tag{1.31}$$

设$\tau_R(\omega)$为下面方程的一个解

$$e^{C_1(\tau_R-t_0)}[V(X_0(\omega),t_0)+BC_2\int_{t_0}^{\tau_R}|\xi(s,\omega)|ds]=V_R. \tag{1.32}$$

于是由(1.31)，有

$$V(X(\tau_R,\omega),\tau_R)\leqslant V_R=\inf_{U'_R\times(t>t_0)}V(X,t),$$

从而有 $\inf\{t:|X(t,\omega)|\geqslant R\}\geqslant\tau_R(\omega)$．亦即(1.24)成立。另外，再由$\xi(t,\omega)\in L$，並由(1.29)推得当$R\to\infty$时，有$\tau_R\uparrow\infty$，$a.s.$ 因此，定理1.10的条件全部满足，从而由定理1.10即得定理1.12． ∎

〔注〕 (1)如果 $|\xi(t,\omega)|^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\in L$，对于某个 $\varepsilon>0$ 成立，则条件(1.28)可以稍加减弱，并可以条件

$$\|\sigma(X,t)\|^{(1+\varepsilon)}\leqslant C_3V(X,t) \tag{1.33}$$

来替代．为了证明这一事实，只需利用 Young 不等式

$$|ab|<\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q},\quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p,\ q>0\right) \tag{1.34}$$

来估计 $\|\sigma\|\cdot|\xi|$ 即可．

特别，如果对每 $T>0$，存在常数 C，使得过程 $\xi(t,\omega)$ 满足条件：

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t,\ \omega)|<C\}=1,$$

则对于充分小的 $\varepsilon>0$，不等式(1.33)成立即可．

(2)定理1.12的条件，保证了初值问题(1.25)的解，在下面意义下的一致无限延拓：对于某个$K>0$，和所有满足

$$P\{|X_0(\omega)|<K\}=1 \tag{1.35}$$

的初始条件 $X_0(\omega)$，我们可找到满足条件 (1.24) 的随机变量族 $\{\tau(R,\ \omega)\}$．因为

$$P\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}|X(t,\ \omega,\ X_0(\omega))|>R\}\leqslant P\{\tau_R<T\},$$

从而，对每 $\varepsilon>0$，$T>0$，$K>0$，存在一个 $R>0$，使得

$$P\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}|X(t,\omega,X_0(\omega))|>R\}<\varepsilon$$

对于所有满足条件(1.35)的$X_0(\omega)$．

例1.2 考虑一维情形，並且 Ляпунов 函数$V(x,t)=|x|+1$．则可得到如下的结果：如果 F，$\sigma\in C$，σ 满足条件(1.28)并且 $\xi(t,\omega)$，$F(0,t)\in L$，则初值问题(1.25)的解可无限延拓的一个充分条件是对某个 $C>0$，有

$$(\operatorname{sign}x)F(x,t)<C(|x|+1).$$

例 1.3 考虑方程

$$x''+f(x)x'+g(x)=\sigma(x,x')\xi(t,\omega). \tag{1.36}$$

此方程描述了很多由随机过程驱动的雷达系统的输出"过程"．特别，对于 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=x$ 且$\sigma(x,x')=1$，则

它是一个由 Van-der-pol 方程所描述的系统的输出过程。

如果函数 $f(x)$ 是下有界的，並假设

$$|\sigma(x,x')|<C_1, \qquad \left|\frac{g(x)}{x}\right|<C_2,$$

则 $V(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\in C_0$ 显然是系统：

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=-f(x)y-g(x)$$

的Ляпунов函数，此外，V 满足条件(1.29)与(1.30)．利用定理1.12，易见，方程(1.36)的解过程，对于所有的 $t\geqslant t_0$ 存在，只要 $\xi(t,\omega)\in L$ 即可。

§1.4　随机有界性

一、随机有界性的概念

为了讨论由微分方程系统定义的随机过程的随机有界性，一开始我们先来引进各种弱随机有界性的概念。（这里弱的意义，是相对于后面几章的随机有界性概念而言的。）

定义1.4　过程 $\{\xi(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是称为**弱随机一致有界的**，如果

$$\operatorname*{Sup}_{t>0} P\{|\xi(t,\omega)|>R\}\longrightarrow 0, \text{ 当 } R\to\infty \text{ 时。}$$

定义1.5　称随机变量 $X_0(\omega)$ 属于类 A_{R_0}，如果

$$P\{|X_0(\omega)|<R_0\}=1. \tag{1.37}$$

定义1.6　系统(1.21)是称为**耗散的**，如果对某个 $R>0$，$X_0(\omega)\in A_R$，它的解过程 $\{X(t,\omega;X_0,t_0),t\geqslant t_0\}$ 是弱随机一致有界的。

此定义与确定性耗散系统（见§2）的定义是一致的。

二、耗散性的判别准则（充分条件）

为了建立系统(1.25)是耗散的充分条件，我们需要下面的引理。

引理1.13 设$V(X,t)$为一非负函数，$\eta(t,\omega)$为一随机过程，它使得$EV(\eta(t,\omega),t)$存在，则

$$P\{|\eta(t,\omega)|>R\} \leqslant EV(\eta(t,\omega),t)\Big/\inf_{U_R'\times(s>t_0)} V(X,s). \tag{1.38}$$

【证明】 事实上

$$EV(\eta(t,\omega),t) \geqslant \int_{|\eta(t,\omega)|>R} V(\eta(t,\omega),t)P(d\omega)$$

$$\geqslant \inf_{U_R'\times(s>t_0)} V(X,s)P\{|\eta(t,\omega)|>R\}.$$

定理1.14 对于F, σ满足局部Lipschtiz条件(1.12)并且σ还满足条件(1.28)的系统(1.25)，如果在域$E=E_l\times I$上存在一个满足条件(1.29)及条件

$$\frac{d^0V}{dt} \leqslant -C_1V \qquad (C_1\text{为一正常数}) \tag{1.39}$$

的非负Ляпунов函数$V(X,t)\in C_0$，则系统(1.25)，对每个使得

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\omega)|<\infty \tag{1.40}$$

的过程$\xi(t,\omega)$是耗散的。

【证明】 设$X(t,\omega)$是初值问题(1.25)的一个解，则函数$V(X(t,\omega),t)$对几乎所有的ω，是t的$a.e.$可微函数，由引理1.11和(1.39)有

$$\frac{d^{(1)}V(X(t,\omega),t)}{dt} \leqslant \frac{d^0V(X(t,\omega),t)}{dt} + BC_2|\xi(t,\omega)|$$
$$\leqslant -C_1V(X(t,\omega),t) + BC_2|\xi(t,\omega)|.$$

从而由引理1.6有

$$V(X(t,\omega),t) \leqslant V(X_0(\omega),t_0)e^{-C_1(t-t_0)}$$
$$+ BC_2\int_{t_0}^{t} e^{C_1(s-t)}|\xi(s,\omega)|ds.$$

对上式两端取期望並利用(1.40)，易见 $EV(X(t,\omega),t)$ 对于 $t \geqslant t_0$ 及所有满足条件(1.37)的 $X_0(\omega)$ 是一致有界的，再利用(1.38)即得此定理。

〔注〕：(1)显然，由定理1.8的注(1)知，满足条件(1.29)与(1.39)的函数 V 的存在性，对每个满足(1.40)的过程 $\xi(t,\omega)$ 而言，不仅是系统(1.25)耗散的充分条件而且也是必要条件。

(2)如果对于某个 $\varepsilon>0$，

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\omega)|^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} < \infty,$$

则利用(1.34)，容易表明，我们可以条件(1.33)来替代定理1.14中的条件(1.28)。此定理的另一个改进是条件(1.39)只需在某个 U'_R 中成立，其中 $R>0$；並且 V 和 $\frac{d^0V}{dt}$ 在域 U_R 中均为有界的（见定理1.8的注(2)）。

(3)不难由定理1.14的假设推得，函数 $V(X,t)$ 的增长至多是线性的，即

$$V(X,t)<C_1|X|+C_2.$$

此外，如果存在常数 C_3 和 C_4，使得

$$V(X,t)>C_3|X|-C_4 \tag{1.41}$$

则由定理的证明推得

$$\sup_{t>0} E|X(t,\omega)|<\infty.$$

注(3)的一般化，可得下面的定理。

定理1.15 设函数 V,F 和 σ 满足定理1.14的条件，此外，还假设 V 满足(1.41)，並对某个 $\alpha>1$，有

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\omega)|^{\alpha}<\infty, \tag{1.42}$$

则初值问题(1.25)的每个解$X(t,\omega)$满足不等式

$$\sup_{t>0} E|X(t,\omega)|^{\alpha}<\infty.$$

进而，存在正常数C和$T=T(R_0,t_0)$，使得对每个R_0和每个满足(1.37)的初始条件$X_0(\omega)$，解$X(t,\omega)$满足下面的不等式：

$$E|X(t,\omega)|^{\alpha}<C, \qquad 对于 t>t_0+T.$$

【证明】 考虑Ляпунов函数$W(X,t)=[V(X,t)]^{\alpha}$. 由定理的假设，引理1.11和(1.34)，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(1)}W(X(t),t)}{dt} &= \alpha[V(X(t),t)]^{\alpha-1}\frac{d^{(1)}V(X(t),t)}{dt}\\
&\leqslant \alpha[V(X(t),t)]^{\alpha-1}\Big[\frac{[d^0V(X(t),t)}{dt}\\
&\quad + B\|\sigma(X(t),t)\|\cdot|\xi(t,\omega)|]\\
&\leqslant \alpha[V(X(t),t)]^{\alpha-1}[-C_1V(X(t),t)+BC|\xi(t,\omega)|]\\
&= -C_5W(X(t),t)+C_6[V(X(t),t)]^{\alpha-1}|\xi(t,\omega)|\\
&\leqslant -C_5W(X(t),t)\\
&\quad + C_6\Big[\frac{[V(X(t),t)]^{\alpha}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\frac{|\xi(t,\omega)|^{\alpha}}{\alpha}\Big]\\
&= -C_7W(X(t),t)+C_8|\xi(t,\omega)|^{\alpha},
\end{aligned}$$

其中C_5，C_6，C_7，C_8 为正常数。

进而，如同定理1.14的证明，易见$\sup\limits_{t>0} EW(X(t,\omega),t)<\infty$，由此及不等式$W(X,t)\geqslant C_9|X|^{\alpha}-C_{10}$(它是(1.41)的推论)，推得定理的第一部分。第二部分的证明是类似的。∎

通过各种特定随机过程$\xi(t,\omega)$的考虑，我们可以导得

在关于Ляпунов函数不太严格的限制下的各种耗散条件。下面的定理就是一例。

定理1.16 设过程 $\xi(t,\omega)$ 是使得对某个 $C_1>0$，$C_2>0$，$A>0$ 和所有$0\leqslant s\leqslant t$，有

$$E\exp\{C_1\int_0^t|\xi(u,\omega)|du\}\leqslant A\exp\{C_2(t-s)\}. \qquad (1.43)$$

另外，假设在域E上存在一个非负函数 $V(X,t)\in C_0$，它满足条件(1.29)和条件：

$$\sup_{t>0}V(0,t)<\infty, \qquad \frac{d^0V}{dt}<C,$$

$$\frac{d^0V}{dt}<-C_2-\varepsilon, \quad \text{对于}|X|>R_0\text{和某个}\varepsilon>0,$$

$$\lim_{R\to\infty,X_i\in U_R^i,t\geqslant 0}\frac{|V(X_2,t)-V(X_1t)|}{|X_2-X_1|}=B_1.$$

进而，设 F 和 σ 满足条件 (1.12) 和条件$\|\sigma\|\leqslant K$，其中，$B_1K<C_1$，则系统(1.25)是耗散的。

【证明】 设$V(X,t)$为满足定理假设的函数，此外，假设$R>R_0$足够大，于是对于$|X_i|>R$，我们有

$$|V(X_2,t)-V(X_1,t)|<\frac{C_1}{K}|X_2-X_1|.$$

置 $W(X,t)=\exp\{V(X,t)\}$，由定理的假设推得，对于几乎所有的 $t\geqslant t_0$ 和使得$|X(t,\omega)|>R$ 的(t,ω)，有

$$\frac{dW(X(t,\omega),t)}{dt}\leqslant W[\frac{d^0V}{dt}+C_1|\xi(t,\omega)|]$$

$$\leqslant W[-(C_2+\varepsilon)+C_1|\xi(t,\omega)|].$$

因为$V\in C_0$并且V 和 d^0V/dt 对于 $|X|\leqslant R$ 均为有界的，这意味着存在正常数 C_3,C_4，使得下面的估计，对于几乎所有

的 t，ω 成立：

$$\frac{dW(X(t,\omega),t)}{dt}\leqslant W[-(C_2+\varepsilon)+C_1|\xi(t,\omega)|]$$
$$+C_3+C_4|\xi(t,\omega)|.$$

利用引理1.6，易见几乎必然有

$$W(X(t,\omega),t)\leqslant W(X_0(\omega),t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(-C_2-\varepsilon\right.$$
$$\left.+C_1|\xi(s,\omega)|)ds\right\}+\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_2-\varepsilon\right.$$
$$\left.+C_1|\xi(u,\omega)|)du\right\}(C_3+C_4|\xi(s,\omega)|)ds$$
$$\leqslant(W(X_0(\omega),t_0)+C_5)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(-C_2\right.$$
$$\left.+C_1|\xi(s,\omega)|)ds\right\}+C_6\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_2-\varepsilon\right.$$
$$\left.+C_1|\xi(u,\omega)|)du\right\}ds.$$

计算上不等式两端的期望並利用(1.37)和(1.43)，易见 $E(W(X(t,\omega),t)<C_7$. 再由(1.38)即得证。 ∎

三、例子和补充

下面的例子表明，如果定理1.14中的条件(1.40)以条件：

$$\sup_{t>0}E|\xi(t,\omega)|^{\alpha}<\infty, \qquad (\alpha<1)$$

来替代，则定理1.14的结论不成立。

例1.4

设$x(t,\omega)$为下面初值问题在 E_1 中的解，

$$\frac{dx}{dt}=-x+\xi(t,\omega), \qquad x(1)=0. \tag{1.44}$$

过程$\xi(t,\omega)$定义为：

$$\xi(t)=\begin{cases}2^{k/2}a\exp\{2^k-t+\gamma(2^k-\tau_k)\}, & t\in[\tau_k,\tau_k+2^{-k}]\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.45}$$

其中$\tau_1,\tau_2,\cdots$为独立随机变量，使得τ_k以密度

$$P_k(s)=A_k\exp\{-\gamma(2^k-s)\} \tag{1.46}$$

分布在区间$[2^{k-1},\ 2^k-2^{-k}]$上。其中$\gamma>0$，并且A_k是由规范化要求确定的（显然当$k\to\infty$时，$A_k\to\gamma$）。

由(1.44)—(1.46)易得估计

$$x(2^k,\omega)=\int_0^{2^k}\exp(s-2^k)\xi(s,\omega)ds$$

$$>\int_{2^{k-1}}^{2^k}\exp(s-2^k)\xi(s,\omega)ds$$

$$=\int_{\tau_k}^{\tau_k+2^{-k}}2^{k/2}e^{\gamma(2^k-\tau_k)}ds\geqslant 2^{k(\frac{1}{a}-1)}\to\infty,$$

$$a.s.\ \text{当}k\to\infty\text{时。}$$

另方面，如果$\gamma>a/(1-a)$，$2^{k-1}\leqslant t\leqslant 2^k$，则

$$E|\xi(t,\omega)|^a\leqslant A_k\int_{t-2^{-k}}^t e^{-\gamma(2^k-s)}\,2^k e^{a(2^k-t)+2\gamma(2^k-s)}\,ds$$

$$\leqslant A_k e^{-(2^k-t)[\gamma(1+a)-a]}<\infty,\quad(\text{其中}a<1).$$

因此，如果(1.40)不成立，我们不能断言系统(1.25)是耗散的，即使不受扰系统(1.26)是一个渐近稳定的线性系统。

下面的例子，将表明定理1.16中的条件(1.43)不能以(1.40)或甚至比它更强的条件：

$$E\ \xi(t,\omega)\longrightarrow 0,\qquad \text{当}\ t\to\infty\text{时}$$

来替代。

例1.5 考虑E_1中的初值问题

$$\frac{dx}{dt}=-\operatorname{sign} x\ln(|x|+1)+\eta(t,\omega),\quad x(0)=0. \tag{1.47}$$

其中 $\eta(t,\omega)$ 为满足下面条件的一个随机阶跃过程：

$$\eta(t,\omega)=\begin{cases}2(2^{n+1}-\tau_n)\ln(2^{n+1}-\tau_n), & \tau_n<t<\tau_n+1 \quad (n=2,3,\cdots)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\tau_2,\cdots\tau_n,\cdots$为独立随机变量，$\tau_n$以密度

$$p_n(s)=\frac{C_n}{(2^{n+1}-s)\ln(2^{n+1}-s)},$$

$$C_n=(\ln\ln(2^n-2)-\ln\ln 2)^{-1}$$

分布于区间$[2^n,2^{n+1}-1]$.

显然，对于$2^n\leqslant t\leqslant 2^{n+1}$，有

$$E\eta(t,\omega)=E|\eta(t,\omega)|$$

$$\leqslant\int_{t_1}^{t}2P_n(s)(2^{n+1}-s)\ln(2^{n+1}-s)ds=2C_n.$$

因此，当$t\to\infty$时，$E|\eta(t,\omega)|\longrightarrow 0$.

设$\tilde{x}(t,\omega)$记为方程(1.47)的解，其满足初始条件$\tilde{x}(\tau_n,\omega)=0$，于是根据对初值问题(1.47)的解的唯一性，并由过程$\eta(t,\omega)$的定义，有不等式

$$x(2^{n+1},\omega)\geqslant\tilde{x}(2^{n+1},\omega)=\int_{\tau_n}^{2^{n+1}}[\eta(t,\omega)-\ln(\tilde{x}(t,\omega)+1)]dt$$

$$\geqslant 2(2^{n+1}-\tau_n)\ln(2^{n+1}-\tau_n)-(2^{n+1}-\tau_n)$$

$$\times \ln[2(2^{n+1}-\tau_n)\ln(2^{n+1}-\tau_n)]. \qquad (1.48)$$

由 $P_n(s)$ 的定义，$P\{2^{n+1}-\tau_n>n\}>\frac{1}{2}$，因此利用(1.48)易见对充分大的$n$，$P\{x(2^{n+1},\omega)>\frac{n}{2}\ln n\}>\frac{1}{2}$. 这意味着系统(1.47)是非耗散的。

易见，对于此系统的Ляпунов函数 $V(x)=|x|$ 满足：当 $|x|\to\infty$时，$\frac{d^0V}{dt}=-\ln(V+1)\to-\infty$. 利用同样方法，我们可以构造一个满足除(1.39)外的定理1.14的所有假设的非耗散系统的例子，(1.39)以下式来替代：

$$\frac{d^0V}{dt}<-\Phi(V). \qquad (1.49)$$

其中$\Phi(V)$是一个使得

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\Phi(x)}=\infty \qquad (1.50)$$

的任意函数。

(此种类型的例子是Hasminskii[7]所构造的)定理1.14中的条件(1.39)是否可以条件(1.49)来替代？其中Φ是使得积分(1.50)收敛的函数$\Phi(V)$.这个问题还是一个尚未解决的问题，甚至我们还不知道下列更特殊问题的答案。

是否存在如下类型的非耗散系统？

$$\frac{dx}{dt}=\begin{cases}-\operatorname{sign}|x|^{\alpha}+\xi(t,\omega), & |x|>1;\\ -x+\xi(t,\omega), & |x|\leqslant 1.\end{cases}$$

其中 $0<\alpha<1$，并且$\xi(t,\omega)$满足条件(1.40)。

例1.6 考虑在E_1中的方程(1.25)，假设几乎必然有$|\xi(t,\omega)|<C_1$，进而假设必要的光滑条件成立并$|\sigma|\leqslant k$.

置 $V(x)=|x|$, $C_1=k+\varepsilon$, $C_2=C(k+\varepsilon)$. 如果常数 C_1, C_2 均按上述那样选择，条件(1.43)显然是正确的。此外，如果

$$\frac{d^0V}{dt}=\operatorname{sign}x\cdot F(x,t)\leqslant -Ck-\varepsilon_1,\quad (|x|>R_0) \tag{1.51}$$

对于某个 $\varepsilon_1>0$ 和所有充分大的 $|x|$. 则定理1.16的所有其它假设也成立。因此由该定理我们可得下面的推论。

推论1.17 方程(1.25)在 E_1 中是耗散的一个充分条件是存在常数 C, k, ε_1, 使得(1.51)和

$$P\{|\xi(t,\omega)|\leqslant C\}=1,\quad |\sigma|\leqslant k$$

成立。另一方面，显然如果

$$F(x,t)>-Ck,\qquad |x|>R_0.$$

则对于 $\sigma=k$, $\xi(t,\omega)\equiv C$, 此方程是非耗散的。

例1.7 假设对某正常数 C_1,

$$\frac{F(x,t)}{x}<-C_1,\quad |x|>R_0. \tag{1.52}$$

并假设过程 $\xi(t,\omega)$ 满足条件(1.40).

考虑Ляпунов函数

$$V(x,t)=\begin{cases}|x|-R_0, & |x|>R_0.\\ 0\quad, & |x|\leqslant R_0.\end{cases}$$

易见，定理1.14的所有假设均满足，因此(1.52)与(1.40)对于一维系统(1.25)是耗散的充分条件。

注意上面的Ляпунов函数满足不等式(1.41)，因此，利用定理1.15，我们得到下面的结果：

如果条件(1.52)满足，并且条件(1.42)对于某个 $\alpha>1$ 成立，则 E_1 中的初值问题(1.25)的解 $x(t,\omega)$ 有有界的 α 阶矩。

例1.8 再考虑方程。

$$x''+f(x)x'+g(x)=\sigma(x,x')\xi(t,\omega). \qquad (1.53)$$

假设过程$|\xi(t,\omega)|$的期望有界，系数σ上、下有界并且存在一个$x_0>0$，使得对于$|x|>x_0$有

$$0<C_1<\frac{g(x)}{x}<C_2,\ 0<C_3<f(x)<C_4. \qquad (1.54)$$

则由系统(1.53)定义的过程是耗散的。

为证此，考虑系统

$$x'=y,\ y'=-f(x)y-g(x)+\sigma(x,y)\xi(t,\omega) \qquad (1.55)$$

它等价于(1.53)，令

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt, \qquad G(x)=\int_0^x g(t)dt,$$

$$W(x,y)=(F-\gamma x)y+G(x)+\int_0^x f(t)(F(t)-\gamma t)dt+1+\frac{y^2}{2}.$$

$$V(x,y)=\begin{cases}[W(x,y)]^\alpha-C, & \text{对于}[W(x,y)]^\alpha>C.\\ 0\quad, & \text{对于}[W(x,y)]^\alpha\leqslant C.\end{cases}$$

函数W是关于y的一个二次式，利用(1.54)易见，对某个$\gamma>0$，有$W\to\infty$，当$R=(x^2+y^2)^{1/2}\to\infty$时。其次，我们可由$V(x,y)\in C_0$来选择一个$\alpha>0$，利用

$$\frac{d^0W}{dt}=-[\gamma y^2+g(F-\gamma x)]$$

与(1.54)，易见，对于充分小的$\gamma>0$和$\alpha>0$，条件(1.39)成立，只要$R>R_0$。从而推得，对于适当选择的C，不等式(1.39)对于$V(x,y)$处处成立，故由定理1.14推得，我们的过程是耗散的。

对于一般系统(1.21)，可以证明下面的结果，它是类似于确定性情形的Domidovič定理[8]。

定理1.18 如果下面的条件成立：

(i) $E|G(0,t,\xi(t,\omega))|<C<\infty, \qquad (t\geqslant t_0)$.

(ii)存在一个对称正定矩阵 $D=(d_{ij})$，由矩阵 D 的对称化，使得 Jocobi 式：$J(X,t,Z)=\left(\frac{\partial G}{\partial X}(X,t,Z)\right)$ 关于 X, t 和 Z 是一致负定的，即对称矩阵 $DJ+J^*D$ 的所有根满足不等式 $\lambda(X,t,Z)<-\lambda_0<0$，则系统(1.21)是耗散的。

【证明】 令 $V(X)=(DX,X)^{1/2}$，显然

$$\frac{dV(X(t,\omega))}{dt}=(\mathrm{grad}V,G)$$

$$=\frac{(DG(X(t,\omega),t,\xi(t,\omega)),X(t,\omega))}{V(X(t,\omega))}.$$

由定理的假设，並由 Demidovič[8]的基本引理推得

$$(DG(X,t,Z)-DG(0,t,Z))<-\lambda_0(X,X).$$

因此，我们得到不等式

$$\frac{dV(X(t,\omega))}{dt}\leqslant-\lambda_0\frac{(X(t,\omega),X(t,\omega))}{V(X(t,\omega))}$$

$$+\frac{(DG(0,t,\xi(t,\omega)),X(t,\omega))}{V(X(t,\omega))}\leqslant-C_1V+C_2|G(0,t,\xi(t,\omega))|.$$

由引理1.6，此不等式意味着所需的结论。 ▮

§1.5 随机稳定性

一、问题的提出

本节的目的是研究方程

$$\frac{dX}{dt}=G(X,t,\xi(t,\xi)) \tag{1.56}$$

的一个特解 $X=\overline{X}(t,\omega)$ 的稳定性条件。

因为系统(1.56)一般代表某随机系统的运动方程，其中 t 表示时间，X 表示关于质点的坐标和速度等的某一向量函数，$\xi(t,\omega)$ 为一向量随机过程，它表示系统的随机作用力或某种随机因素。而(1.56)的每个特解 $\overline{X}(t,\omega)$ 对应系统的某个特定的随机运动。

我们知道，无论是系统的初始状态或是方程组本身，它们的微小变化都要影响此系统的每个运动，一般来说，对不同的运动这种影响也是不同的。对一些运动，这种影响在某种指标意义下并不显著，因而受干扰的运动与未受干扰的运动在某指标意义下相差很小。相反，对某些运动，这种影响在某种指标意义下可能很显著，以致无论系统的初始状态或方程组本身的变化多么小，受干扰的运动与未受干扰的运动在某种指标意义下相差很大。**第一类运动通常称为在相应指标意义下是稳定的，而第二类运动称为是不稳定的。**

随机运动稳定性理论与确定性运动稳定性理论一样，就是从事研究建立一些准则，用以判断所考察的运动在某种指标意义下是稳定的还是不稳定的。

二、随机稳定性的概念

为了更好的理解 Ляпунов 运动稳定性概念，我们先考虑确定性情形。考虑常微分方程组

$$\frac{dX}{dt}=F(X,t). \qquad (*)$$

今设 $X=\overline{X}(t)$，$t\in I$ 为$(*)$的一个特解，按 Ляпунов 的术语，对应于解 $X=\overline{X}(t)$ 的运动称为**未受干扰运动**，而对应于其它解 $\overline{X}=X(t;X_0,t_0)$ 的运动称为**受干扰运动**，

并称差$X(t;X_0,t_0)-\overline{X}(t)$为**扰动或干扰**，称$X_0-\overline{X}(t_0)$为**初始扰动或初始干扰**。

这样，所考虑的解$X=\overline{X}(t)$是稳定的，就相当于说：要使扰动的模$|X(t;X_0,t_0)-\overline{X}(t)|$，$t\geqslant t_0$多么小都可以，只要初始扰动的模$|X_0-\overline{X}(t_0)|$足够小就可以了。

在实际中，为了简单起见，我们只研究方程组(*)的零解(平凡解)$X(t)\equiv0$的稳定性问题，这并不失其一般性，因为对方程组(*)的任一特解$X=\overline{X}(t)$的稳定性问题，可以通过变换$Y=X-\overline{X}(t)$，化成关于Y的方程组：

$$\frac{dY}{dt}=\frac{dX}{dt}-\frac{d\overline{X}}{dt}=F(X,t)-F(\overline{X},t)$$

$$=F(Y+\overline{X}(t),t)-F(\overline{X}(t),t)\equiv G(Y,t)$$

的平凡解$Y(t)\equiv0$的稳定性问题。

平凡解$X(t)\equiv0$的稳定性概念，即使在确定性情形，也可以各种意义来给出。例如，有局部稳定性概念与大范围稳定性概念；也有渐近稳定性概念与非渐近稳定性概念等。在随机情形，这些概念更有较大的多样性，因为稳定性的概念，实质上是一种收敛性的概念，因此，对每种确定性的稳定性定义，按照概率论中每种收敛模式都有其相应的随机稳定性的定义。这里我们不列出所有可能的定义，仅列出在较弱的意义下的各种随机稳定性的定义。为此，我们引进组(1.56)的平凡解$X(t)\equiv0$的稳定性的定义，其中G满足条件：

$$G(0,t,\xi(t,\omega))\equiv0. \tag{1.57}$$

即$X\equiv0$为系统(1.55)的**平衡状态(或静止状态)**。

平凡解$X(t)\equiv0$是称为

(1) **弱随机稳定的**。如果对每个 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon'>0$，存在一个 $\delta>0$，使当 $t\geqslant t_0$ 和 $|X_0|<\delta$ 时，就有

$$P\{|X(t,\omega;X_0,t_0)|>\varepsilon'\}<\varepsilon. \qquad (1.58)$$

(2) **弱随机渐近稳定的**。如果它是弱随机稳定的，並且对每一 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当 $|X_0|<\delta$ 时，有

$$\lim_{t\to\infty} P\{|X(t,\omega;X_0,t_0)|>\varepsilon\}=0.$$

(3) **p稳定的**。如果对每个 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使当 $t\geqslant t_0$，$|X_0|<\delta$ 时，有

$$E|X(t,\omega;X_0,t_0)|^p<\varepsilon. \qquad (p>0)$$

(4) **渐近 p 稳定的**．如果它是 p 稳定的，並且对于充分小的 $|X_0|$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty} E|X(t,\omega;X_0,t_0)|^p=0$.

(5) **大范围弱随机渐近稳定的**。如果它是弱随机稳定的，並且如果对每个 $X_0,\varepsilon>0,\varepsilon'>0$，存在一个 $T=T(X_0,t_0,\varepsilon,\varepsilon')>0$，使得(1.58)对所有的 $t>t_0+T$ 成立。

类似地可得大范围渐近 p 稳定性的定义。

(6) **指数 p 稳定的**。如果存在常数 $A>0$，$\alpha>0$，使得

$$E|X(t,\omega;X_0,t_0)|^p\leqslant A|X_0|^p\exp\{-\alpha(t-t_0)\}.$$

(7) 在上面任何一种意义下的**几乎必然稳定性**。如果几乎所有样本函数即除去某个概率为零的集合外的所有样本函数均在相应的意义下是稳定的。

〔注〕：由 Чебышев不等式推得，对于平凡解的任一p值的(渐近)p稳定性就有对于每个比它小的p值的(渐近)p稳定性和弱随机稳定性．另方面，我们可以例子表明对于某个 p，其平凡解可以是（渐近）p稳定性的，但对于 $p_1>p$，它不是(渐近) p_1 稳定的（见下面§1.6)。

在文献中最常讨论的是对于 $p=1,2$ 的 p 稳定性，在此情形，一般分别称其为均值稳定性与均方稳定性。

三、稳定性的判别准则

除非对所给系统作出某些限制性的假设，否则要找到非寻常和有效的稳定性条件一般是不可能的.例如，在Bertram和Sarachik[9]中的稳定性条件是通过一个使得$E\dot{V}(X(t),t)<0$的Ляпунов函数$V(X,t)\geqslant 0$来给出的，其中$\dot{V}$记为沿(1.56)轨道的对t的全导数.然而为了要计算期望$E\dot{V}(X(t),t)$，必须解具有恰当初始条件的系统(1.56)，这就限制了这一准则的实际使用。

这里我们仅限于讨论下面类型系统的稳定性条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX}{dt}=F(X,t)+\sigma(X,t)\xi(t,\omega),\\&F(0,t)\equiv 0,\qquad \sigma(0,t)\equiv 0.\end{aligned}\right\}\tag{1.59}$$

它的稳定性条件是通过下面的**截尾系统**：

$$\frac{dX}{dt}=F(X,t)\tag{1.60}$$

的Ляпунов函数的存在性来给出的。

在本段中.我们假设所考虑的Ляпунов函数都是关于t是一致正定的，即

$$\inf_{t>0,\ |X|>\gamma} V(X,t)=V_\gamma>0\qquad 对于\gamma>0,\tag{1.61}$$

並且令

$$B=\sup_{t>0,\,X_i\in E^l}\frac{|V(X_2,t)-V(X_1,t)|}{|X_2-X_1|}.$$

定理1.19 对于系统(1.60)，如果存在一个满足条件(1.61)和条件：

$$V(0,t)\equiv 0,\quad \frac{d^0V}{dt}\leqslant C_1V,\quad |\sigma|\leqslant C_2V\tag{1.62}$$

($C_1,C_2>0$均为常数)的Ляпунов函数$V(X,t)\in C$。此

外，假设过程$|\xi(t,\omega)|$满足大数律(1.1)和条件：

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\omega)|<\frac{C_1}{BC_2}, \tag{1.63}$$

则系统（1.59）的平凡解是弱随机渐近稳定的。如果过程$|\xi(t,\omega)|$满足强大数律(1.2)，其它所有假设仍保持不变，则解$X(t)=0$是几乎必然渐近稳定的。

【证明】 由引理1.11并从(1.62)推得

$$\frac{d^{(1)}V(X(t,\omega),t)}{dt}\leqslant -C_1V(X(t,\omega),t)+BC_2|\xi(t,\omega)|V.$$

不失一般性，我们可假设$t_0=0$，利用引理1.6，有估计

$$V(X(t,\omega),t)\leqslant V(X_0,0)\exp\left\{\int_0^t(BC_2|\xi(s,\omega)|-C_1)ds\right\}$$

$$\leqslant V(X_0,0)\exp\left\{BC_2\left[\frac{1}{t}\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds-\frac{C_1}{BC_2}\right]t\right\} \tag{1.64}$$

现在让$\varepsilon>0$，$\varepsilon'>0$任意，利用(1.63)以及过程$|\xi(t,\omega)|$满足大数律的假设，则一定存在一个数$T>0$，使得对于$t\geqslant T$，有

$$P\left\{\frac{1}{t}\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds>\frac{C_1}{BC_2}\right\}<\varepsilon. \tag{1.65}$$

现选择一个充分大的数$M>1$，使得

$$P\left\{BC_2\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds>\ln M\right\}<\varepsilon. \tag{1.66}$$

最后，我们选取一个足够小的$\delta>0$，使得对于$|X_0|<\delta$，有

$$V(X_0,0)M<V_{\varepsilon'}. \tag{1.67}$$

现在从不等式(1.64)—(1.67)，并分别对$t<T$和$t\geqslant T$考虑对于$|X_0|<\delta$和所有$t\geqslant 0$，推得

$$P\{|X(t,\omega)|>\varepsilon'\}\leqslant P\{V(X(t,\omega),t)>V_{\varepsilon}'\}\leqslant\varepsilon,$$

再利用关系式

$$P\left\{\frac{1}{t}\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds>\frac{C_1}{BC_2}\right\}\to 0,\ \text{当}\ t\to\infty\ \text{时},$$

即得定理的第一部分。第二部分的证明是类似的。 ▮

定理1.20 对于系统(1.60)，如果存在一个Ляпунов函数$V(X,t)\in C_0$，並满足条件(1.62)和不等式

$$V(X,\ t)>C|X|,\qquad (C>0). \tag{1.68}$$

另外，假设过程$\xi(t,\omega)$是使得对于某正常数k_1,k_2和$t>0$，有

$$E\exp\left\{k_1\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds\right\}\leqslant\exp\{k_2t\} \tag{1.69}$$

其中常数k_i，C_i，B满足不等式

$$Bk_2C_2\leqslant k_1C_1, \tag{1.70}$$

则系统(1.59)的解$X(t)\equiv0$，对于$p\leqslant k_1/BC_2$的p是p稳定的。如果下面的严格不等式成立：

$$Bk_2C_2<k_1C_1, \tag{1.71}$$

则平凡解，对于$p\leqslant k_1/BC_2$的p是指数p稳定的。

【证明】 由不等式(1.64)及(1.68)，有

$$C|X(t,\omega)|\leqslant V(X(t,\omega),t)\leqslant V(X_0,0)\exp\left\{BC_2\left[\frac{1}{t}\times\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds-\frac{C_1}{BC_2}\right]t\right\}.$$

对上不等式两端自乘k_1/BC_2次幂並取期望，有

$$C^{k_1/BC_2}E|X(t,\omega)|^{k_1/BC_2}\leqslant(V(X_0,0))^{k_1/BC_2}E\exp\left[\left(k_1\times\int_0^t|\xi(s,\omega)|ds-\frac{C_1k_1}{BC_2}t\right)\right]$$

于是由(1.69)，有

$$E|X(t,\omega)|^{k_1/BC_2}\leqslant\left[\frac{V(X_0,0)}{C}\right]^{k_1/BC_2}\exp\left[\left(k_2-\frac{C_1k_1}{BC_2}\right)t\right]$$

$$=\left[\frac{V(X_0,0)}{C}\right]^{k_1/BC_2}\exp\left[\frac{k_2BC_2-C_1k_1}{BC_2}t\right].$$

如果 $p\leqslant k_1/BC_2$，则由不等式(1.70)，即得系统(1.59)平凡解是 p 稳定的，由不等式(1.71)即得系统(1.59)平凡解是指数 p 稳定的。 ∎

[注](1)由定理1.19的证明，可看出对过程 $|\xi(t,\omega)|$ 满足大数律的要求，可作某些减弱，然而这条件是不能完全忽略的，这由下面的例子可看出。

$$\frac{dx}{dt}=(-a+\xi)\cdot x$$

其中 $a>0$，並且随机变数 ξ 可取任意大的正值而期望 $E\xi$ 可以小。于是此方程的解：

$$x(t,\ \omega)=x_0\exp\{(-a+\xi)t\}$$

依概率 $P=P\{\xi>a\}$ 趋于无穷.

同例表明，定理1.20的条件(1.69)不能本质地减弱.

(2)定理1.19与1.20提供导致稳定平衡的条件，自然不是局部的，因为关于Ляпунов函数所取的条件(1.62)必须处处成立，不仅是在原点的邻域内．不难作出这样一个随机过程 $\xi(t,\omega)$，它使得定理1.19与1.20的所有假设均局部地成立，但原点仍然是不稳定的．例如，下面的方程就是一例：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-x+x^3}{1-|x|^3}+x\xi(t,\omega),\qquad x(0)=x_0.$$

其中过程 $\xi(t,\ \omega)$ 除了在长为 $\Delta_k\to0$ 的区间上等于 $\frac{1}{\Delta_k^2}$ 外，处处为0，並且区间 Δ_k 是随机散布的，它们在轴上充分地稀疏，则我们可保证大数律与条件(1.63)成立．尽管如此，如果 $x_0>0$，则仍几乎必然地有 $x(t)\to\infty$。

此例表明．局部Ляпунов函数的存在性，对于随机稳定性不是充分的.

§1.6 随机受扰确定性系统的稳定性

下面的问题已由某些作者研究过.

设$X=0$为方程

$$\frac{dX}{dt}=F(X,t), \quad (F(0,t)=0) \tag{1.72}$$

在某种意义下的稳定解. 试问: 如果右端的$F(X,t)$诸如通过充分小的随机力受扰, 则此系统的解, 对于所有的$t\geqslant t_0$仍保持在所给的原点邻域内吗? 具体地说, 除系统(1.72)外, 我们考虑系统

$$\frac{dX}{dt}=F(X,t)+R(X,t). \tag{1.73}$$

称(1.72)的解$X(t)=0$, 在扰动持续作用下是稳定的, 如果对每一$\varepsilon>0$, 存在一个$\delta>0$, 使得如果

$$|X_0|<\delta, \quad |R(X,t)|<\delta;$$

则系统(1.73)的解$X(t;X_0,t_0)$满足不等式:

$$|X(t,X_0,t_0)|<\varepsilon, \text{ 对于所有的 } t\geqslant t_0.$$

Malkin[10]曾得到了在扰动持续作用下稳定性的一个充分条件是系统(1.72)的平凡解, 关于X_0, t_0是一致渐近稳定的.

然而, 上述定义中的假设, 有时显得太苛刻了. 例如, 当系统(1.72)的右端是受随机扰动, 而这种扰动只是平均地小, 但有时在某随机时刻开始受到的"冲击"可以是很显著的, 並延伸一个不短的周期. 因此, 按上述定义, 显然不意味着平凡解的稳定性, 因为此解有时可以扩展到远远超过原

点。在这种情形下稳定性的有效定义，只能是在任一固定时刻，其样本函数应具有充分大的概率，属于原点的邻域。为此，我们严格定义如下：

除方程(1.72)外，我们考虑

$$\frac{dX}{dt}=F(X,t)+R(X,t,\omega) \tag{1.74}$$

其中函数 $R(X,t,\omega)$ 使得方程(1.74)满足§1.3的存在和唯一性定理。另外，我们还假设随机过程

$$\eta(t,\omega)=\sup_{X}|R(X,t,\omega)|$$

有有限期望。

系统(1.72)的解 $X=0$ 是称为在小均值随机扰动持续作用下，对于 $t\geqslant t_0$ 是稳定的（简称小随机扰动下稳定），如果满足初始条件 $X(t_0,\omega)=X_0$ 的方程(1.74)的解，当

$$|X_0|+\sup_{t\geqslant t_0}E\eta(t,\omega)\to 0 \tag{1.75}$$

时，对于 $t\geqslant t_0$ 一致地按概率趋于0。

换言之，系统(1.72)的解 $X=0$ 在小随机扰动下是稳定的，如果对每 $\varepsilon>0$，和 $\varDelta>0$，存在一个 $\gamma>0$，使当

$$|X_0|+\sup_{t\geqslant t_0}E\eta(t,\omega)<\gamma$$

时，就有

$$P\{|X(t,\omega)|>\varDelta\}<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0$$

定理1.21 假定在E上存在一个满足下列性质的Ляпунов函数 $V(X,t)\in C_0$：

(i) $V(0,t)=0$，对于 $\delta>0$，有 $V_\delta>0$；

(ii) 对于每 $\delta>0$，存在一个 $C_\delta>0$，使得

$$\frac{d^0V}{dt}<-C_\delta V \tag{1.76}$$

在域$\{|X|>\delta\}\times\{t>t_0\}$中成立。

则方程(1.72)的解$X=0$，对于$t\geqslant t_0$是小随机扰动下稳定的。

【证明】 由定理的假设推得在域$|X|>\delta$中有

$$\frac{dV(X(t,\omega),t)}{dt}\leqslant\frac{d^0V}{dt}+C\eta(t,\omega). \tag{1.77}$$

令

$$V(\delta)=\sup_{t\geqslant t_0,|X|<\delta}V(X,t),$$

则当$\delta\to 0$时，$V(\delta)\to 0$。

此外，定理的假设意味着对于$X\neq 0$有$d^0V/dt<0$。鉴于此不等式和(1.76)推得，对于所有X和几乎所有ω，有

$$\frac{dV}{dt}\leqslant -C_\delta V+C\eta(t,\omega)+C_\delta V(\delta). \tag{1.78}$$

利用引理1.6，然后取不等式两端的期望（见定理1.14的证明），易见

$$EV(X(t,\omega)t)\leqslant V(X_0,t_0)e^{C_\delta(t-t_0)}+C/C_\delta\sup_{t>t_0}E\eta(t,\omega)+V(\delta) \tag{1.79}$$

现让$\varepsilon>0$和$\Delta>0$任意，取充分小的δ，$|X_0|$以及$\eta(t,\omega)$，我们易得不等式

$$EV(X(t,\omega),t)\leqslant\varepsilon+\sup_{t>t_0,|X|<\delta}V(X,t). \tag{1.80}$$

据此不等式及引理1.13，即得所需结论。 ∎

〔注〕(1)如果系统(1.72)的平凡解$X=0$是指数稳定的，即假设具有初始条件$X(t_0)=X_0$的系统(1.72)的解$X(t;x_0,t_0)$有估计：$|X(t;x_0,t_0)|<B|X_0|\exp\{-\alpha(t-t_0)\}$，其中$B,\alpha>0$是与$x_0$及$t_0$无关的常数。则对于系统(1.72)存在一个函数$W(x,t)$，使得

$$C_1|x|^2 < W(X,t) < C_2|x|^2,$$

$$\frac{d^0 M}{dt} \leqslant -C_3|x|^2, \qquad \left|\frac{\partial M}{\partial x}\right| < C_4|x|.$$

只要 $\left\|\frac{\partial F}{\partial X}\right\|$ 在E中是有界的(见 Krasovskii, [17] p.72)。从这些估计推得，函数 $V(x, t)=[W(x, t)]^{1/2}$满足定理1.21的所有假设。因此得到：如果系统1.72的平凡解是指数稳定的，则它在小随机扰动下也是稳定的。

(2)如果函数 $V(x, t)$ 满足定理 1.21 的假设，此外，对某个 $C_1>0$，$V(x,t)>C_1|x|$，则由定理 1.21 的证明，显然推得系统 1.72 在小随机扰动下，在较强的意义下是稳定的。事实上，我们有

$$\sup_{t>0} E|X(t, \omega)| \to 0, \text{ 当 } |x_0| + \sup_{t>0} E\eta(t,w) \to 0 \text{ 时}.$$

注(1)表明，当未受扰系统是指数稳定时，上面类型的稳定性(均值稳定性)成立。而且易见在此情形，我们还有在小均方随机扰动下的均方稳定性；即

$$\sup_{t>0} E|X(t, w)|^2 \to 0, \text{当 } |x_0| + \sup_{t>0} E\eta^2(t,\omega) \to 0 \text{时}.$$

进一步导出关于均方稳定性的更一般准则是不困难的。

(3)由§1.4的例1.5,显然条件(1.76)不能以在区域$|x|>\delta$中的条件：$\frac{d^0 V}{dt} < -C_\delta$来替代。稍许改变§1.4的例1.4，容易表明，如果此扰动，仅假设

$\sup\limits_{t>0} E[\eta(t, \omega)]^2 \to 0$，对于 $\alpha<1$，那末，即使一个线性渐近稳定系统在此扰动下，仍可以是不稳定的。因此，如果$E\eta(t, \omega)$不趋于 0，那末即使"最好性态"的稳定系统，也可丧失它的稳定性(我们这里不考虑 $E\eta(t, \omega)$ 不存在时的白噪声情形，对于此情形，见下一章)。

通过进一步限制容许随机扰动的范围，定理1.21的条件可稍减弱些。

在大多数实际应用中，似乎只要去考虑

$$R(X,t,\omega)=\sigma(X,t)\xi(t,\omega) \tag{1.81}$$

这种类型的随机扰动。

我们称系统(1.72)的解 $X(t)\equiv 0$ 是在(1.81)型小随机

扰动下是稳定的，如果对每 $\varepsilon>0$ 和 $\Delta>0$，存在一个 $\mathscr{K}>0$，使得只要

$$|X_0|+\sup_{X,t}|\sigma(X,t)|<\mathscr{K}, \tag{1.82}$$

则下面的不等式，对于 $t>t_0$ 成立：

$$P\{|X(t,\omega)|>\Delta\}<\varepsilon$$

（这一定义是自然的，因为矩阵 $\sigma(X,t)$ 表征了在点 (X,t) 的随机扰动的强度）。

定理1.22 设 $V(X,t)\in C_0$ 是 E 中的一个 Ляпунов 函数，满足定理1.21 的假设 (i)，并且满足不等式 (1.76) 以 $\frac{d^0V}{dt}<-C_\delta$ 来替代的假设(ii)，进而假设过程 $\xi(t,\ \omega)$ 满足下面的条件：对每 $\varepsilon>0$，存在一个 $\gamma>0$，使得对于 $t_0\leqslant s\leqslant t$，有

$$E\exp\left\{\gamma\int_{\infty}^{t}|\xi(u,\omega)|du\right\}\leqslant e^{\varepsilon(t-s)}. \tag{1.83}$$

则方程(1.72)的解 $X=0$，对于 $t\geqslant t_0$，在(1.81)型随机扰动下是稳定的。

【证明】 我们令

$$W(X,t)=\exp\{V(X,t)\}-1,\quad W(\delta)=\sup_{U_\delta\times(t>t_0)}W(X,t),$$

如同前面(1.78)式的证明，可得估计：

$$\frac{dW}{dt}\leqslant W(-C_\delta+\gamma|\xi(t,\omega)|)+\gamma|\xi(t,\omega)|+C_\delta W(\delta). \tag{1.84}$$

它对于每 $\delta>0$ 和 $\gamma>0$ 是正确的，只要不等式(1.82)对 $\mathscr{K}<\gamma/B$ 成立。利用引理1.6，我们从(1.84)推得：

$$W(X(t,\omega),t)\leqslant W(X_0,t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(s,\omega)|)ds\right.$$

$$+C_\delta W(\delta)\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du\right\}ds$$

$$+\gamma\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du\right\}$$

$$\times|\xi(s,\omega)|ds. \tag{1.85}$$

让 ε 为任一数，使得 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，由(1.83)推得，我们可选择一个 $\gamma_0(\varepsilon)>0$，使得 $\gamma<\gamma_0(\varepsilon)$，有

$$E\exp\left\{\gamma\int_{s}^{t}|\xi(u,\omega)|du\right\}\leqslant\exp\{\varepsilon C_\delta(t-s)\}, \tag{1.86}$$

由于当 $\delta\to0$ 时，$W(\delta)\to0$(这一事实，直接从定理的条件推得)，易见，我们可首先选择 $\delta(\varepsilon)$，然后 $\mathscr{K}(\varepsilon)$ 和 $\gamma_0(\varepsilon)$，使得不等式(1.86)成立，进而

$$E\Big[W(X_0,t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du\right\}$$

$$+C_\delta W(\delta)\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|du\right\}ds\Big]<\varepsilon. \tag{1.87}$$

其次，由等式

$$J=\gamma\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega|)du\right\}|\xi(s,\omega)|ds$$

$$=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|du\right\}$$

$$-1+C_\delta\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}(-C_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|du\right\}ds.$$

並由(1.86)推得

$$EJ\leqslant\exp\{-C_\delta(1-\varepsilon)(t-t_0)\}-1$$

$$+C_\delta\int_{t_0}^{t}\exp\{-C_\delta(1-\varepsilon)(t-s)\}ds\leqslant\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\leqslant4\varepsilon. \tag{1.88}$$

从(1.85)，(1.87)和(1.88)推得，如果 $|X_0|+\sup_{t>t_0} E\eta(t,\omega)<\mathscr{K}(\varepsilon)$，则对于所有，$t>t_0$，有 $EW(X(t,\omega),t)<5\varepsilon$。为了导得定理的结论，只要应用引理1.13即可。 ∎

例1.9 在一维情形，我们利用 Ляпунов 函数 $V(x)=|x|$ 可得下面的结果：设在某个区域 $|x|>\delta$ 中，对于某个 $C_\delta>0$，有 $F(x,t)/x<-C_\delta$ 成立，则点 $x=0$ 在小随机扰动下是稳定的。而且如果以假设：对于 $|x|>\delta$，$\operatorname{sign} xF(x,t)<-C_\delta$ 来替代上面的假设，则点 $x=0$ 在(1.81)型小随机扰动下仍是稳定的，只要 $\xi(t,\omega)$ 满足条件(1.83)即可。

* § 1.7 Gauss过程的某种泛函估计

在上一节的定理1.22中，我们看到下面的估计(1.89)，在随机系统的稳定性理论中起着重要的作用。

$$E\exp\{k_1\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|ds\}\leqslant\exp\{k_2(t_1-t_0)\},t_1\geqslant t_0 \quad (1.89)$$

在随机扰动的持续作用下，系统的稳定性，需要对每 $\varepsilon>0$，存在一个 $\gamma>0$，使得对于 $t_1>t_0$，有估计：

$$E\exp\{\gamma\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|ds\}\leqslant\exp\{\varepsilon(t_1-t_0)\}. \qquad (1.90)$$

在本节中，我们将对 Gauss 过程，导出这些估计成立的简单条件。为此，我们先对随机函数的展开作一简单回顾，以便后面的应用(关于随机函数的展开，详见 Pugacev[12] § 56，§ 60或 Gihman 和 Skorohod[13]第 5 章§5.2)。

一、随机函数的规范展开式

为了简单起见，下面我们仅考虑一维情形，对于多维情形，完全类似。

1. 何谓随机函数的规范展开式

设 $\{\xi(t,\omega), t\in T\}$ 为任一随机函数(一般均假设为中心化随机函数)，如果对每 $t\in T$，它能展开为如下的形式：

$$\xi(t,\omega)=\sum_k f_k(t)\xi_k(\omega), \quad a.s. \tag{1.91}$$

则称此展开式为$\{\xi(t,\omega), t\in T\}$的**规范展开式**。

其中，$\xi_k(\omega)$为具有零期望的不相关随机变量(一般取Gauss 白噪声等)，它称为此规范展式的系数或称为**Fourier系数**；$f_k(t)$为非随机函数，它称为此规范展式的**坐标函数**。

随机函数的规范展式，一般为无穷级数，在特殊情形，可以是有限和的形式。相应展式(1.91)，有

$$K(t,s)=\sum_k D_k f_k(t)\overline{f_k(s)}, \quad t,s\in T. \tag{1.92}$$

它称为$\{\xi(t,\omega), t\in T\}$的相关函数的规范展式。其中$D_k$为随机变量$\xi_k(\omega)$的方差。

现在的问题是如何去求出规范展式(1.91)中的坐标函数$f_k(t)$与不相关随机变量$\xi_k(\omega)$？

2. 规范展开式的求法

在理论上十分重要的一种特殊规范展式，就是以相关函数$K(t,s)$为核的积分方程：

$$\int_T K(t,s)\varphi(s)p(s)ds=\lambda\varphi(t) \tag{1.93}$$

的特征函数$\varphi_k(t)$为坐标函数的展开式。式中的$p(s)$为任

意非负的权函数。

因为由 Hilbert-Schmidt 定理，如果积分

$$I=\int_T\int_T|K(t,s)|^2p(t)p(s)dtds \tag{1.94}$$

存在，则特征值的离散序列(有限或可数)：

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant\lambda_n\geqslant\cdots \tag{1.95}$$

及对应这些特征值与权函数 $p(t)$ 的正交特征函数 φ_1，φ_2，…，均存在。因此，

$$\int_T K(t,s)\varphi_k(s)p(s)ds=\lambda_k\varphi_k(t)。 \tag{1.96}$$

$$\int_T\varphi_k(t)\overline{\varphi_l(t)}p(t)dt=\delta_{kl}。 \tag{1.97}$$

并且所有的特征值 $\{\lambda_k\}$ 均为正的。

如果 $K(t,s)$ 在 $T\times T$ 上是连续的，则 $K(t,s)$ 可在 T 内展为绝对一致收敛的级数：

$$K(t,s)=\sum_k\lambda_k\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)}。 \tag{1.98}$$

在一般情况下，当 $K(t,s)$ 可能有不连续点时，式(1.98)中的级数，平均收敛于 $K(t,s)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_T\int_T\left|K(t,s)-\sum_{k=1}^n\lambda_k\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)}\right|^2p(t)p(s)dtds=0。 \tag{1.99}$$

现在我们取展开式(1.91)中的坐标函数 $f_k(t)=\varphi_k(t)$，Fourier 系数

$$\xi_k(\omega)=\int_T\xi(t,\omega)\varphi_k(t)p(t)dt，\quad E|\xi_k|^2=\lambda_k=D_k，$$

即得到 $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$ 的一种规范展开式：

$$\xi(t,\omega)=\sum\varphi_k(t)\xi_k(\omega)，\quad a.s. \tag{1.100}$$

而(1.98)式给出了相关函数的相应规范展开式。

展式(1.98)的平均收敛性，保证了$\xi(t,\omega)$依特征函数的规范展式(1.100)，对相同t值的均方收敛性。

任何随机函数均可用积分方程的特征函数规范展式来表示，积分方程的核是随机函数的相关函数，而权函数$p(t)$可完全任意选择。我们总可选择一个$p(t)$使得积分(1.94)存在(包括T为无限域的情形)而且有无穷多个选法。为了确定特征值λ_k和特征函数φ_k，就必须解积分方程(1.93)，这就涉及到相当繁重的计算。

3. 完备性与Parseval等式

如果对任意k，不存在满足下列条件：

$$\int_T\int_T \overline{\psi(t)}\varphi_k(s)p(s)K(t,s)dtds=0, \tag{1.101}$$

$$\int_T\int_T \psi(t)\psi(s)K(t,s)dtds>0$$

的函数ψ，则$\{\varphi_k\}$称为关于随机函数$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$的完备函数系。可以证明：函数系$\{\varphi_k\}$完备的充要条件是函数$\xi(t,\omega)$的规范展式(1.100)均方收敛于随机函数$\xi(t,\omega)$。

由$\{\varphi_k\}$的完备性及(1.97)式，即得Parseval等式

$$\int_T|\xi(t,\omega)|^2dt=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2. \tag{1.102}$$

二、Gauss过程的某种泛函估计

考虑E_l中的一个Gauss过程$\xi(t,\omega)$，亦即它的有限维分布是Gauss分布的过程。另外，假设此过程是可测的，并且它的核$K(s,t)$是连续的。其中，

$$K(s,t)=(K^{(ij)}(s,t))=\mathrm{cov}(\xi(s),\xi(t)) \quad (见§1.1).$$

根据惯例，我们定义方阵 $A=(a_{ij})$ 的迹为

$$\operatorname{tr} A \triangleq \sum_{i=1}^{l} a_{ii}$$

引理1.23 过程 $\{\xi(t,\omega), t\in[t_0,t_1]\}$，对每一 t，可以展为如下的级数：

$$\xi(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\ \varphi_k(t)\xi_k(\omega). \quad a.s. \tag{1.103}$$

並且满足 Parseval 恒等式：

$$\int_{t_0}^{t}|\xi(t,\omega|^2 dt=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k^2, \tag{1.104}$$

其中 $\varphi_k(t)$ 和 λ_k 为积分方程

$$\int_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=\lambda\varphi(t) \tag{1.105}$$

的规范化的特征函数与特征值。$\xi_k(\omega)$ 是具有零期望和单位方差的独立 Gauss 随机变量。

【证明】 将过程 $\{\xi(t,\omega), t\in[t_0,t_1]\}$ 按方程(1.105)的特征函数序列展开，即得此证明。其中，展式中的权系数 $p(s)=1$，Fourier 系数取为 $\{\sqrt{\lambda_k}\xi_k(\omega)\}$。

利用 Fourier 系数公式：

$$\sqrt{\lambda_k}\ \xi_k(\omega)=\int_{t_0}^{t_1}\xi(t,\omega)\varphi_k(t)dt$$

与 $\varphi_k(t)$ 的正交性以及过程是 Gauss 的等事实，就可推得随机变数 $\xi_k(\omega)$ 是独立的。恒等式(1.104)从特征函数系 $\{\varphi_k\}$ 的完备性推得。∎

引理1.24 关于上述过程 $\{\xi(t,\omega), t\in[t_0,t_1]\}$，有

(i) 对于所有 $t_0<t_1$ 和充分小的 $\alpha>0$，泛函 exp $\{\alpha$

$\times\int_{t_0}^{t_1}|\xi(t,\omega)|^2dt\}$ 的期望存在，而且有表达式

$$E\exp\{\alpha\int_{t_0}^{t_1}|\xi(t,\omega)|^2dt\}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\lambda_k}}. \quad (1.106)$$

(ii)如果 $\xi(t,\omega)$ 还满足下列条件：

$$\operatorname{tr}K(s,s)=E|\xi(s,\omega)|^2\leqslant C_1, \quad (1.107)$$

$$\int_0^\infty\|K(s,u)\|du=\int_0^\infty\|K(u,s)\|du\leqslant C_2. \quad (1.108)$$

对于某个 $C_i>0(i=1,2)$ 和所有 $s>0$.

则对所有 $t_0<t_1$，有

$$E\exp\{\alpha\int_{t_0}^{t_1}|\xi(t,\omega)|^2dt\}\leqslant\exp\left\{\frac{\alpha C_1}{1-2\alpha C_2}(t_1-t_0)\right\}.$$

【证明】 由(1.104)和(1.107)，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=E\int_{t_0}^{t_1}|\xi(u,\omega)|^2du\leqslant C_1(t_1-t_0) \quad (1.109)$$

因此

$$\lambda_{\max}=\max_{1\leqslant k<\infty}\lambda_k$$

存在。不失一般性，可假设

$$\lambda_{\max}=\lambda_1.$$

由假设及矩母函数的性质，有

$$E\exp\{\alpha\lambda_k\xi_k^2(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\lambda_k}}, \qquad \alpha<1/2\lambda_1.$$

由此及(1.104)，即得(1.106)。

现在证明：$\lambda_1=\lambda_{max}\leqslant C_2$。事实上，

$$\lambda_1=\int_{t_0}^{t_1}\lambda_1(\varphi_1(s),\varphi_1(s))ds=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(K(s,t)\varphi_1(t),\varphi_1(s))dsdt$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\|K(s,t)\|\,|\varphi_1(t)|\,|\varphi_1(s)|dsdt$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\|K(s,t)\|\frac{|\varphi_1(t)|^2+|\varphi_1(s)|^2}{2}dsdt$$

$$\leqslant C_2. \qquad (\text{由}(1.108)) \tag{1.110}$$

其次，利用初等不等式：$1+\gamma<e^{\gamma}$ $(\gamma>0)$，有

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\lambda_k}}=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+2\alpha\lambda_k+\frac{4\alpha^2\lambda_k^2}{1-2\alpha\lambda_k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{2\alpha\lambda_k}{1-2\alpha\lambda_k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\exp\left\{\alpha\left[1+\frac{2\alpha\lambda_1}{1-2\alpha\lambda_1}\right]\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{\alpha}{1-2\alpha\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\} \quad (\text{由}(1.109),(1.110))$$

$$\leqslant\exp\left\{\frac{\alpha C_1}{1-\alpha C_2}(t_1-t_0)\right\}. \quad ■$$

定理1.25 如果具有零期望的 Gauss 过程$\xi(t,\omega)$满足条件(1.107)和(1.108)，则下面的估计成立：

$$E\exp\{k_1\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|ds\}<\exp\{k_1[\sqrt{C_1}+\frac{k_1C_2}{2}]\times(t_1-t_0)\}. \tag{1.111}$$

【证明】利用不等式：

$$a\leqslant\frac{\alpha}{2}a^2+\frac{1}{2\alpha} \quad (\alpha>0) \tag{1.112}$$

可得

$$E\exp\{k_1\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|ds\}$$

$$\leqslant\exp\left\{\frac{k_1}{2\alpha}(t_1-t_0)\right\}E\exp\left\{\frac{k_1\alpha}{2}\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|^2ds\right\}$$

因此，由引理1.24推得，对所有 $\alpha<1/k_1C_2$，有

$$E\exp\{k_1\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|ds\}\leqslant\exp\{[\frac{k_1}{2\alpha}+\frac{k_1\alpha C_1}{2(1-\alpha k_1C_2)}]\times(t_1-t_0)\} \tag{1.113}$$

令 $\alpha=\alpha^*=1/(k_1C_2+\sqrt{C_1})$，即得 (1.111)。 ∎

推论1.26 如果已知

$$|E\xi(t,\omega)|\leqslant C_0, \tag{1.114}$$

则我们可略去条件 $E\xi(t,\omega)=0$。

事实上，易见如果以(1.114)来替代条件 $E\xi(t,\omega)=0$，则类似于定理1.25的结论成立。即

如果 $\xi(t,\omega)$ 是一个满足条件(1.107)，(1.108)和(1.114)的 Gauss 过程，则下列估计，对所有 $k_1>0$ 和 $-\infty<t_0<t_1<\infty$ 成立：

$$E\exp\{k_1\int_{t_0}^{t_1}|\xi(s,\omega)|ds\}\leqslant\exp\{k_1[C_0+\sqrt{C_1}+\frac{k_1C_2}{2}]\times(t_1-t_0)\}. \tag{1.115}$$

下面我们再证明一个关于 Gauss 过程的关系式，它对于下节中的例子是需要的。

引理1.27 Gauss 过程 $\xi(t,\omega)$ 满足：

$$E\exp\left\{\int_{t_0}^{t_1}\xi(t,\omega)dt\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\hat{K}(s,t)dsdt+\int_{t_0}^{t_1}E\xi(t,\omega)dt\right\} \tag{1.116}$$

其中 $\hat{K}(s,t)$ 是具有分量 $K^{(11)}(s,t),\cdots,K^{(dd)}(s,t)$ 的向量。

【证明】 易见，如果 η 是一个 Gauss 随机变数，它具有零期望和方差 σ^2，则 $E\exp\eta$ 存在，且

$$E\exp\eta=\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\right\}, \tag{1.117}$$

利用(1.117)于 Gauss 随机向量 $\int_{t_0}^{t_1}\xi(s,\omega)ds$，即得(1.116)。∎

[注](1)由引理1.27推得，如果 $\xi(t,\omega)$ 是 E_l 中的一个 Gauss 过程，具有零期望並且它的相关函数是非负的，则条件(1.108)，对于定理1.35的成立是必需的。事实上，如果 $\int_0^{\infty}\|K(s,t)\|dt=\infty$，则由(1.116)，显然估计(1.89)对任意的 k_1 和 k_2 均不成立。

(2)如果过程 $\xi(t,\omega)$ 是平稳的，则条件(1.107)自行满足，並且 $C_1=\mathrm{E}|\xi(t,\omega)|^2$。条件(1.108)，可以下面的条件替代：过程 $\xi(t,\omega)$ 的谱密度 $f(\lambda)$ 的模有界。事实上，利用条件(1.108)只是去证明方程(1.105)的最大特征值是有界的，但对于平稳过程，我们知道 $\max_k \lambda_k\leqslant \mathrm{Sup}\|f(\lambda)\|$。

§1.8 线性系统的稳定性

现在我们将前面所得到的结果，应用于下面类型的线性系统：

$$\frac{dX}{dt}=(A(t)+\eta(t,\omega))X+B(t,\omega). \qquad (1.118)$$

不失一般性，可以假设方阵 $\eta(t,\omega)$ 的元素有零期望。

一、齐次系统

首先，我们考虑齐次系统

$$\frac{dX}{dt}=(A(t)+\eta(t,\omega))X. \qquad (1.119)$$

並假设相应的确定性系统

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X \qquad (1.120)$$

是指数稳定的，亦即系统的每个解 $X(t;X_0,t_0)$ 有估计：

$$|X(t;X_0,t_0)|\leqslant B|X_0|e^{-\alpha(t-t_0)},\ t>t_0\ (\alpha>0). \quad (1.121)$$

其中常数 B,α 与 X_0,t_0 无关。

由常微稳定性理论中的 Malkin 定理[10](P321)知，若(1.121)式成立，则必存在一个正定的二次型：

$$W(X,t)=(C(t)X,X),$$

使得

$$\frac{d^0W}{dt}\leqslant -\lambda|X|^2, \qquad (\lambda>0). \qquad (1.122)$$

下面我们常以 $\frac{d^0W}{dt}$（它本身也是一个二次型）来表示一个二次型沿系统(1.120)的轨道，对 t 的全导数：

$$\frac{d^0W}{dt}=((CA+A^*C+\frac{\partial C}{\partial t})X,X).$$

为了能够将定理1.19，应用于系统(1.119)，就必须将(1.119)化为(1.59)的形式。为此，令

$$\sigma(X,\ t)=\begin{pmatrix} x_1x_2\cdots x_l & & & O \\ & x_1x_2\cdots x_l & & \\ & & \ddots & \\ O & & & x_1x_2\cdots x_l \end{pmatrix}_{l\times l^2}$$

并记 $\eta_{ik}(t,\omega)=\xi_{(i-1)l+k}(t,\omega)$，其中 $\xi(t,\omega)$ 为 E_{l^2} 中的一个向量。

考虑 Ляпунов 函数 $V(X,t)=(W(X,t))^{\frac{1}{2}}$，并利用定理1.19，就可得到下面的结果。

定理1.28 如果常微系统(1.120)的解是指数稳定的，

则存在一个常数$C>0$，对每个使得 $\|\eta(t,\omega)\|$ 满足大数律，并且 $E\|\eta(t,\omega)\|<C$的随机过程 $\eta(t,\omega)$，随机系统(1.119)是弱随机渐近稳定的。如果 $\|\eta(t,\omega)\|$ 还满足强大数律，其它假设保持不变，则随机系统 (1.119) 是几乎必然渐近稳定的。

定理1.19也使得我们有可能对常数 C作出估计。

利用上面同样的 Ляпунов 函数和定理 1.20，我们可以导得对于随机系统(1.119)是 p 稳定的充分条件，只要过程 $\|\eta(t,\omega)\|$ 满足条件(1.69)。

为了进一步讨论，下面先来考察一个例子。

例1.10 考虑 E_1 中的方程

$$\frac{dx}{dt}=(a(t)+\xi(t,\omega))x, \tag{1.123}$$

它有解

$$x(t)=x_0\exp\left\{\int_0^t(a(s)+\xi(s,\omega))ds\right\}. \tag{1.124}$$

利用(1.124)并且稍许改变一下定理 1.19 的证明，我们可得下面的结果。

(1) 弱随机渐近稳定性与不稳定性。

对每具有零期望且满足大数律的随机过程 $\xi(t,\omega)$，当 $a(t)\leqslant a_0<0$ 时，方程(1.123)的解 $X(t)\equiv0$ 是弱随机渐近稳定的；当 $a(t)\geqslant a_0>0$ 时，是不稳定的。

(2) p稳定性。

利用引理 1.27 于具有 $E\xi(t,\omega)=0$ 和相关函数 $K(t-s)$ 的平稳 Gauss 过程 $\xi(t,\omega)$，可得

$$E|X(t,\omega)|^p=|X_0|^p\exp\{p\int_0^t a(s)ds+\frac{p^2}{2}\int_0^t\int_0^t K(u-s)duds\} \tag{1.125}$$

假设函数 $K(u)$ 绝对可积，並且

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(u)du = f(0) > 0,$$

则

$$\int_0^t \int_0^t K(u-s)duds = f(0)t + o(t), (t \to \infty). \quad (1.126)$$

让 $a(t) \leqslant a_0 < 0$，则从（1.125）和（1.126）推得方程(1.123)的解 $x(t) \equiv 0$，对平稳Gauss过程 $\xi(t,\omega)$ 是渐近 p 稳定的，如果 $p < -2a_0/f(0) = p_0$。

如果 $p > p_0$ 且 $a(t) = a_0$（常数），则它是非 p 稳定的。

(3) $a(t) = 0$ 的情形。

现在我们考虑 $a(t) \equiv 0$ 的情形。在此情形，如果存在一个函数 $\alpha(t)$，使得当 $t \to \infty$ 时，$\alpha(t) \to \infty$，並且概率 $P\{\int_0^t \xi(s,\omega)ds > \alpha(t)\} \nrightarrow 0$，则由(1.124)，解 $x(t) \equiv 0$，显然是不稳定的。例如，当中心极限定理可应用于过程 $\xi(t,\omega)$ 的积分时，就是这种情形。可以利用中心极限定理于此情形的相当广泛的条件，可在 Rozanov[14] 中找到。

下面我们讨论常系数情形，並假设 A 是一个定常稳定矩阵，即具有使得 $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ 的特征值 λ_i 的矩阵。Ляпунов 已经证明了，给定一个稳定矩阵，可确定一个正定矩阵 C，使得矩阵 $CA + A^*C$ 是负定的。让 λ 记为使得

$$((CA + A^*C)X, X) \leqslant -\lambda(CX, X), X \in E_l \quad (1.127)$$

的最大正数。易见，通过矩阵 C 和 $CA + A^*C = D$ 的特征值可估计数 λ 的一个下界。让 $\lambda^C_{\max}$ 和 $\lambda^D_{\max}$ 分别记为矩阵 C 和 D 的最大特征值，则显然有

$$\lambda > -\lambda^D_{\max}/\lambda^C_{\max} > 0.$$

定理1.29 如果 A 是一个 $l\times l$ 的稳定矩阵，C 是一个满足条件(1.127)的正定矩阵，并且 $\eta(t,\omega)=(\eta_{kj}(t,\omega))_{l\times l}$ 是一个 Gauss 过程. 另外，假设过程 $\tilde{\eta}(t,\omega)=C^{\frac{1}{2}}\eta(t,\omega)C^{-\frac{1}{2}}$ 满足下列条件：

$$\|E\tilde{\eta}(t,\omega)\|\leqslant C_0,\quad E\|\tilde{\eta}(t,\omega)-E\tilde{\eta}(t,\omega)\|^2\leqslant C_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\|K(u,s)\|du\leqslant C_2,$$

（其中 $K(s,t)=\operatorname{cov}(\tilde{\eta}(s,\omega),\tilde{\eta}(t,\omega))$ 是一个 $l^2\times l^2$ 矩阵），则系统

$$\frac{dX}{dt}=(A+\eta(t,\omega))X \tag{1.128}$$

的平凡解，对于 $p<\dfrac{\lambda-2(C_0+\sqrt{C_1})}{2}$ 是渐近 p 稳定的，只要 $\lambda>2(C_0+\sqrt{C_1})$.

【证明】 考虑 Ляпунов 函数 $V(X)=(CX,X)$，利用(1.127)和估计：

$$(C\eta X,X)=(C^{\frac{1}{2}}\eta C^{-\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}X,C^{\frac{1}{2}}X)$$

$$\leqslant\|C^{\frac{1}{2}}\eta C^{-\frac{1}{2}}\|\cdot\|C^{\frac{1}{2}}X\|=\|\tilde{\eta}\|(CX,X),$$

我们得到

$$\frac{dV(X(t,\omega))}{dt}\leqslant-\lambda V+((C\eta+\eta^*C)X,X)\leqslant V(-\lambda+2\|\tilde{\eta}\|). \tag{1.129}$$

故

$$[V(X(t,\omega))]^p\leqslant[V(X_0)]^p\exp\{-p\lambda t+2p\int_0^t\|\tilde{\eta}(s,\omega)\|ds\}$$

计算它的期望並利用估计式(1.115)，可得

$$E[V(X(t,\omega))]^p \leqslant [V(X_0)]^p \exp\{pt(-\lambda+2C_0+2\sqrt{C_1}+2pC_2)\} \qquad (1.130)$$

由不等式(1.130)，即得定理的结论。■

[注](1)定理1.29的结论表明，当一个指数稳定的线性系统的系数，被一个满足(1.107)，(1.108)和(1.114)且具有充分小的 C_0 和 C_1 的Gauss过程扰动后所得到的系统是渐近 p 稳定的。

(2)在一维情形，一个由具有零期望的Gauss噪声驱动的不稳定系统，仍然是不稳定的，在第3章中，我们将给出一个例子表明：一个不稳定的确定性系统，可以通过选择一个具有零期望的Gauss噪声而被"稳定化"。

二、非齐次系统

现在我们来讨论非齐次系统(1.118)。

(1)利用定理1.21，易见一个指数稳定的线性系统在小随机扰动下是稳定的。

(2)由定理1.14推得，具有 $\eta(t,\omega)\equiv0$ 的系统(1.118)，对每具有有限期望的向量 $B(t,\omega)$ 是耗散的，如果条件(1.121)或(1.127)满足。

现在我们来考察 $\eta(t,\omega)\not\equiv0$ 的情形。为了简单起见，仍假定过程 $\eta(t,\omega)$ 是Gauss过程，并且矩阵 A 是定常矩阵。

定理1.30 设 A 和 $\eta(t,\omega)$ 满足定理1.29的条件並且 $B(t,\omega)$ 是一个取值于 E_l 的随机过程，它与 $\eta(t,\omega)$ 独立且有有界的二阶矩，则系统

$$\frac{dX}{dt}=(A+\eta(t,\omega))X+B(t,\omega) \qquad (1.131)$$

是耗散的，如果

$$2C_0+2\sqrt{C_1}+2C_2<\lambda. \qquad (1.132)$$

【证明】 令 $V(X)=(CX,X)$，利用类似于得到(1.129)的方法，并借助于(1.100)，我们推得

$$\frac{dV(X(t,\omega))}{dt}\leqslant(-\lambda+2\|\tilde{\eta}\|)V+2(CX,B(t,\omega))$$

$$\leqslant(-\lambda+2\|\tilde{\eta}\|+\alpha)V+\frac{\|C^{1/2}\|^2|B(t,\omega)|^2}{\alpha}$$

（其中 α 为任一正数）．因此，利用引理1.6以及过程 η 与 $B(t,\omega)$ 的独立性，有

$$EV(X(t,\omega))\leqslant E\{V(X_0(\omega))\exp\left\{\int_0^t(-\lambda+\alpha+2\|\tilde{\eta}(s,\omega)\|)ds\right\}\}+\frac{\|C^{\frac{1}{2}}\|^2}{\alpha}\int_0^t\{E\exp\int_s^t(-\lambda+\alpha+2\|\tilde{\eta}(u,\omega)\|)du\}E|B(s,\omega)|^2ds.$$

如果 $X_0(\omega)$ 满足条件(1.37)并且常数 $\alpha<\lambda-2C_0-2\sqrt{C_1}-2C_2$，再利用估计(1.115)，易见对于某个常数 $C_3>0$，有

$$EV(X(t,\omega))<C_3.$$

由此及引理1.13可得过程 $X(t,\omega)$ 是耗散的，并且它的二阶矩是有界的． ∎

[注]定理1.30'的结论，对于相依过程 $\eta(t,\omega)$ 与 $B(t,\omega)$ 也可以成立．事实上，在证明过程中，在计算期望之前，可先利用Young不等式(1.34)来估计表达式：$\exp\{2\int_s^t\|\tilde{\eta}(u,\omega)\|du\}|B(s,\omega)|^2$．当然，证明的继续，必须假设 $B(t,\omega)$ 有高于2阶的有界矩，而且还必须以某种更严格的条件去替代条件(1.132)．详细的证明从略．

例1.11 设 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_k,\cdots$ 是一个独立同分布的 $l\times l$ 的随机矩阵序列，$E\eta_k=(O)_{l\times l}$，并设 A 为一个定常矩阵，且 $X(0)=X_0$，而且系统在区间 $t\in[k,k+1]$ 上的演变受约于

方程

$$\frac{dX(t,\omega)}{dt}=(A+\eta_k(\omega))X(t,\omega). \tag{1.133}$$

记 $X_k(\omega)=X(k,\omega)$，显然

$$X_k(\omega)=X_0\exp(A+\eta_{k-1})\exp(A+\eta_{k-2})\cdots\exp(A+\eta_0) \tag{1.134}$$

由于(1.134)，则系统(1.133)是否稳定的问题，就化为随机矩阵的乘积模是否趋于零的问题。

尽管很多作者已经研究过随机矩阵乘积的极限性态，但从这些已知结果不可能去导出关于上面系统稳定性的方便条件。

假设矩阵 A 是稳定的，且 C 是一个满足条件(1.127)的正定矩阵，利用证明定理1.29的方法，可得如下的结果：

如果

$$E\|C^{\frac{1}{2}}\eta_k C^{-\frac{1}{2}}\|<\frac{\lambda}{2}, \tag{1.135}$$

则由系统(1.133)确定的随机过程 $X(t,\omega)$ 是弱随机渐近稳定的，只要

$$f(\alpha)=E\exp\{\alpha\|\eta_k\|\}<\infty. \tag{1.136}$$

为此，我们先来证明：如果条件(1.135)，(1.136)对于充分小的 $\alpha>0$ 成立，则过程 $X(t,\omega)$，对充分小的 p 是渐近 p 稳定的.

引理1.31 设 ξ 是一个正随机变数，使得对某个 α_0，$E\exp\{\alpha_0\xi\}$ 存在，则对充分小的 α，有

$$E\exp\{\alpha\xi\}<\exp\{\alpha E\xi+\frac{\alpha^2}{2}(E\xi^2+\varphi(\alpha))\} \tag{1.137}$$

同时，$\varphi(\alpha)=O(\alpha)$，当 $\alpha\to0$ 时。

此引理的证明，由下面的不等式：

$$E\exp\{\alpha\xi\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n E\xi^n}{n!} = 1 + \alpha E\xi + \frac{\alpha^2}{2} E\xi^2$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha_0}\right]^n \frac{\alpha_0^n E\xi^n}{n!} \leqslant 1 + \alpha E\xi + \frac{\alpha^2}{2} E\xi^2 + \frac{C\alpha^3}{\alpha_0^3 - \alpha^3}$$

和不等式（$1+\gamma<\exp\gamma \quad (\gamma>0)$）推得（其中 $\alpha<\alpha_0$）。

假设条件(1.136)满足，则对充分小的 α，矩阵 $\tilde{\eta}_k = C^{\frac{1}{2}} \times \eta_k C^{-\frac{1}{2}}$ 也满足此条件。另方面，从(1.129)推得下面的估计是正确的。当 $k-1<t<k$ 时，有

$$(CX(t,\omega), X(t,\omega))^p \leqslant (CX_0, X_0)^p \exp\{-p\lambda(k-1)$$

$$+ 2p(\|\tilde{\eta}_0\| + \cdots + \|\tilde{\eta}_{k-1}\|)\}.$$

因为随机变数 $\|\tilde{\eta}_i\|$ 是独立的，则对充分小的 p，由(1.136)和(1.137)推得

$$E(CX(t,\omega), X(t,\omega))^p \leqslant (CX_0, X_0)^p \exp\{-p\lambda(k-1)$$

$$+ 2p(E\|\tilde{\eta}_0\| + \cdots + E\|\tilde{\eta}_{k-1}\|) + o(p)\}.$$

此不等式及(1.135)意味着，如果条件(1.135)和(1.136)满足，则由系统(1.133)确定的过程 $X(t,\omega)$，对充分小的 p 是渐近 p 稳定的。

参考文献

1 Hasminskii, R.Z. Stochastic stability of differential equations. Sijthoff & Noordhoff (1980) Chapter 1.

2 Doob, J.L. Stochastic processes . Wiley , New York , Chapman & Hall (1953) .

3 王梓坤 , 随机过程论 科学出版社 (1965)

4 Ljapunov, A.M. Problem general de la stabilite du mouvement. Kharkov (1892) ; reprint, GITTL , Moscow , (1950)

5 Yoshizawa, J. Liapunov' function and boundedness of solutions. Funkcial Ekvac. 2 (1959) , 95-142, MR.22#5789.

6 Bellman, R.E. Stability of differential equations . McGraw-Hill, New York (1953) .

7 Hasminskii, R.Z. On the dissipativeness of random processes defined by differential equations . Problemy Peredači Informacii 1 (1965) VYP.1, 88-104 , MR.32#4747.

8 Demidovič, B.P. On the dissipativity of a certain non-linear system of differential equations I, II. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh. (1961) no.6, 19-27; ibid (1962) no.1, 3-8, (Russian) MR.25# 4178 , 26#1567 .

9 见绪论参考文献 [6]

10 见绪论参考文献 [7] .

11 Krasovskii, N.N. Certain problems in the theory of stability of motion . Fizmatgiz , Moscow , (1959) ; English transl. Stanford Univ. Press , Stanford Calif. (1963) , MR.21#5047 ; 26#5258.

12 Pugačev, V.S. The theory of random functions and its application to control problems . Fizmatgiz , Moscow (1960) .
(有中译本：田欣为等译，科学出版社 (1966))

13 Gihman, I.I. and Skorohod, A.V. Introduction to the theory of random processes. "Nauka" Moscow , (1965) .

14. Rozanov, Ju.A. Stationary random processes. Fizmatgiz Moscow , (1963) ; English transl. Holden-Day , San Francisco , Calif. (1967), MR. 29#2580 , 35#4985 .

15 张炳根， 常微分方程的随机摄动 .
山东海洋学院学报，第1期 (1979)， 1－14 .

16 张炳根 沈铁魏 ， 随机常微分方程组关于部分变元的稳定性
山东海洋学院学报，第1期 (1981)， 12－22 .

2

Itô 随机微分方程的稳定性

在第1章中我们研究了系数为一般随机过程的微分方程的有界性与稳定性，着重研究了参数在随机扰动下的稳定性问题．然而，正如我们已注意到的，在这种情况下，不可能期望得到较为理想的结果，除非随机扰动具有相当好的混合性．幸好，在“短记忆区间”中，这种噪声的自然极限情形就是白噪声，因此去研究Itô方程解的稳定性就显得十分的重要，因为这相当于去研究受白噪声扰动的系统的稳定性．

关于Itô方程的Ляпунов稳定性理论的兴起，主要是受了Kac和Красовский[24]的工作的激励．

$$\frac{dX}{dt}=f(X,t,Y(t))$$

的平凡解 $X(t)=0$ 的稳定性．其中 $Y(t)$ 是一个齐次有限Markov链．他们是借助于Ляпунов函数来解决的．嗣后，Hasminskii[11] 对他们的工作作了多方面的推广，从而Itô方程的Ляпунов稳定性理论，也就逐步开始兴起与发展．

§2·1 Itô 随机微分方程

一、随机动态系统的数学模型

确定性动态系统的数学模型，通常由一个常微分方程组

$$\frac{dX}{dt}=F(X(t),t)$$

来描述的。方程中仅有一个自变量 t，一般表示时间。而且这类问题，实际上都是假定系统未来的运动，仅由当前的状态决定，而不明显地依赖于它的过去与未来，即所谓动态系统的“**Markov 性**”假设。但如考虑系统的过去历史，则需要考虑 E_l 中如下的泛函微分方程：

$$\frac{dX}{dt}=F(X(s),t).$$

这里对每一 t，$F(X(s),t)$ 是一个对于 $t-\tau(t)\leqslant s\leqslant t$ 的轨线段 $X(s)$ 的泛函。因此如果 $\tau(t)>0$，则此系统未来的运动与系统“过去”的历史有关。此类方程一般称为**有后效方程**。与此相反，一般常微分方程称为**无后效方程**。在实际应用中，为了问题的简化，一般均在“Markov 性”假设的前提下，以常微分方程组来描述确定性动态系统的运动。

Markov 过程在随机过程中，如同常微分方程在动态系统方程中占有相同的地位。为此，在随机动态系统的微分方程描述中，自然地我们就希望由此微分方程定义的随机过程是一个 Markov 过程，于是 Itô 随机微分方程：

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t) \\ &= b(X(t),t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t),t)dW_r(t) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

就是随机动态系统较为理想的一个数学模型。其中 $b(X,t)$，$\sigma_r(X,t)$ 均为 E_l 中的向量，$\sigma(X,t)=(\sigma_{ij}(X,t))_{l\times k}$。$W(t)$

称为 k 维的标准 Wiener 过程(或 Brown 运动)。

这种模型的起源要追溯到1908年，首先由 Langevin 考虑过(见绪论参考文献[2])。以后不久，Einstein 和 Smoluchowski 发表了他们关于 Brown 运动理论的第一篇论文，然而，较为系统的研究仅开始于三十年代中。随机微分方程 (2.1) 解的最简便的构造是由 Itô 的一篇著名论文(见绪论参考文献[3])中给出的．这种构造已在很多有关著作(如 Dynkin[1]，Gihman 与 Skorohod[2]；王梓坤[3] 等)中详细地阐述过，所以在本节中，我们将不加证明地叙述关于方程(2.1)解的存在性、唯一性以及解的其他性质的Itô定理，为此，我们先作些准备。

二、随机积分

1．递增的 σ 代数族 $\{\tilde{\mathcal{N}}_t, t\geqslant 0\}$

设 $\{W(t,w), t\in[a,b]\}$ 为定义于概率空间 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ 上的一个一维标准 Wiener 过程．$\{\tilde{\mathcal{N}}_t, t\geqslant 0\}$ 为 $\mathcal{U}$ 中集合的 σ 代数族，满足下列条件：

(i) $\tilde{\mathcal{N}}_{t_1}\subset\tilde{\mathcal{N}}_{t_2}$，如果 $t_1<t_2$；

(ii)对每 $t\geqslant 0$，$W(t)$ 关于 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 可测；

(iii)过程 $W(t)$ 的增量 $W(t+h)-W(t)$ 独立于每事件 $A\in\tilde{\mathcal{N}}_t$．

2．随机积分定义(一维情形)

定义 2.1 (i)对每个在点 t_1，…，t_n 有跳跃的有界阶梯函数 $f(t,\omega)=f(t)$，如果对每一 $t\in[a,b]$，$f(t)$ 是 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 可测的，则 Itô 随机积分定义为

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \sum_{i=0}^{l} f(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)]^* \qquad (2.2)$$

利用 $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ 与 $f(t_i)$ 的独立性，易证阶梯函数随机积分的下列性质成立：

$$E\left\{\int_a^b f(t)dW(t) \mid \widetilde{\mathcal{N}}_a\right\} = 0, \ a.s. \qquad (2.3)$$

$$E\left\{\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|^2 \mid \widetilde{\mathcal{N}}_a\right\} = E\left\{\int_a^b f^2(t)dt \mid \widetilde{\mathcal{N}}_a\right\}$$

$$= \int_a^b E[f^2(t) \mid \widetilde{\mathcal{N}}_a]dt. \ a.s. \qquad (2.4)$$

(ii) 如果 $f^2(t) \in L$，且对每个 $t \in [a, b]$，$f(t)$ 是 $\widetilde{\mathcal{N}}_t$ 可测的，则它的 Itô 随机积分是通过阶梯函数随机积分序列取极限来定义的（见 Gihman 与 Skorohod[2] 第八章 §2 或王梓坤[3] 第十章）。而且可以证明性质(2.3)和(2.4)对每个上述函数 $f(t)$ 也都的正确的，只要

$$\int_a^b E[f^2(t) \mid \widetilde{\mathcal{N}}_a]dt < \infty, \ a.s. \qquad (2.5)$$

3. 不定随机积分

可以证明，如下定义的随机积分（或称为不定积分）：

$$\xi(t) = \int_a^t f(s)dW(s) = \int_a^b \chi_t(s)f(s)dW(s)$$

（其中 $\chi_t(s)$ 为集 $\{s < t\}$ 的示性函数）是一个可分的，样本函数几乎必然连续的随机过程，且满足 Колмогоров 不等式：

---

* Стратонович(1963)提出了另一种定义：

$$(c)\int_a^b f(t)dw(t) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)[W(t_{i+1}) - W(t_i)].$$

相应于此定义的随机积分称为 Стратонович 积分。

$$P\{\sup_{t\in[a,b]}|\xi(t)|>C|\tilde{\mathcal{N}}_a\}\leqslant\frac{1}{C^2}\int_a^b E[f^2(s)|\tilde{\mathcal{N}}_a]ds. \quad (2.6)$$

4. 多维情形

至此，我们已考虑了 E_l 中的随机积分，推广这种定义到多维情形是没有什么困难的。

设 $\sigma_1(t),\cdots,\sigma_k(t)$ 为 E_l 中的向量，对每个固定的 t，它的分量均为 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 可测的。让 $W_1(t),\cdots,W_k(t)$ 是相互独立的 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 可测的 Wiener 过程，並对任一 $h>0$，随机变数 $W_i(t+h)-W_i(t)$ 均独立于 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 中的事件，则取值于 E_l 的随机积分定义如下：

$$\zeta_r(t)=\int_a^t\sigma_r(s)dW_r(s),\quad \zeta(t)=\sum_{r=1}^k\zeta_r(t)=\int_a^t\sigma(s)dW(s).$$

其中

$$\sigma_r(s)=\begin{pmatrix}\sigma_{1r}(s)\\ \vdots\\ \sigma_{lr}(s)\end{pmatrix},\quad W(s)=\begin{pmatrix}W_1(s)\\ \vdots\\ W_k(s)\end{pmatrix},$$

$$\sigma(s)=(\sigma_{ij}(s))_{l\times k}=(\sigma_1(s),\cdots,\sigma_k(s)).$$

三、随机微分与 Itô 公式

设 $b(t,\omega)$ 与 $|\sigma_r(t,\omega)|^2$ $(r=1,2,\cdots,k)$ 均属于类 L 且对每个 t 均为 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 可测的，此外，对所有 $a<t_1<t_2<b$，有

$$\zeta(t_2)-\zeta(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}b(t)dt+\sum_{r=1}^k\int_{t_1}^{t_2}\sigma_r(t)dW_r(t). \quad (2.7)$$

则称 $\tilde{\mathcal{N}}_t$ 可测过程 $\zeta(t)$ 有 Itô 随机微分 $d\zeta(t)$，並且

$$d\zeta(t)=b(t)dt+\sum_{r=1}^k\sigma_r(t)dW_r(t).$$

Itô 对于随机微分，建立了下面类似链的法则，我们称它为 Itô 微分公式。

定理 2.1（Itô 公式）若函数 $u(X,t)$ $(X\in E_l,t\in[a,b])$

关于 X 有直到二阶的连续偏导数，关于 t 有一阶的连续偏导数。并且取值于 E_l 的过程 $\zeta(t)$ 有 Itô 微分：

$$d\zeta(t)=b(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t)dW_r(t),$$

则过程 $\eta(t)=u(\zeta(t),t)$ 也有Itô 微分，并且

$$\begin{aligned}d\eta(t)=&\left\{\frac{\partial u(\zeta(t),t)}{\partial t}+\left[b(t),\frac{\partial}{\partial X}\right]u(\zeta(t),t)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left[\sigma_r(t),\frac{\partial}{\partial X}\right]^2u(\zeta(t),t)\right\}dt\\&+\sum_{r=1}^{k}\left[\sigma_r(t),\frac{\partial}{\partial X}\right]u(\zeta(t),t)dW_r(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial X}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_l}\right)^T,$$

$$\begin{aligned}\left[\sigma_r(t),\frac{\partial}{\partial X}\right]^2u&=\left[\sigma_r,\frac{\partial}{\partial X}\right]\left(\left[\sigma_r,\frac{\partial}{\partial X}\right]u\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{l}\sigma_{ir}\sigma_{jr}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}.\end{aligned}$$

显然，(2.8)和通常的链法则之间的差别，仅表现在项：

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left[\sigma_r(t),\frac{\partial}{\partial X}\right]^2u(\zeta(t),t)dt.$$

回到随机微分方程(2.1)，现在我们可以将它解释为，它是关联 E_l 中的过程 $X(t,\omega)$ 和 Wiener 过程 $W_r(t)$ $(r=1,2,\cdots,k)$ 的随机微分的一个方程式，故称其为**随机微分方程**(Stochastic differential equations)，借助于积分，方程(2.1)等价于下列随机积分方程：

$$X(t)=X(t_0)+\int_{t_0}^{t}b(X(s),s)ds+\sum_{r=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(X(s),s)dW_r(s).\tag{2.9}$$

过程 $X(t,\omega)$ 是称为方程(2.9)在区间$[t_0,T]$上的一个解，如果

(i) 对每$t\in[t_0,T]$，它是$\mathscr{N}_t$可测的；

(ii) 它使得(2.9)中的积分存在；

(iii) 对每个$t\in[t_0,T]$，它几乎必然地满足方程(2.9)。

四、 Itô 定理

下面的定理是关于方程(2.9)解的存在性、唯一性和某些其它性质的定理的概括。

定理2.2 设向量$b(X,s)$，$\sigma_1(X,s)$，…，$\sigma_k(X,s)$ $(X\in E_l, s\in[t_0,T])$ 是(X,s)的连续函数，且对于某个常数B，在整个定义区域内，下列条件成立：

$$|b(X,s)-b(Y,s)|+\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(X,s)-\sigma_r(Y,s)|$$

$$\leqslant B|X-Y| \quad \text{(Lipschitz条件)} \qquad (2.10')$$

$$|b(X,s)|+\sum_{i=1}^{k}|\sigma_i(X,s)|$$

$$\leqslant B(1+|X|) \quad \text{(线性增长条件)} \qquad (2.10'')$$

则

(1) 对每个独立于过程$W_r(t)-W_r(t_0)$的随机变数$X(t_0)$，存在方程(2.9)的解过程$X(t,\omega)$，它是以概率1唯一的，并且样本函数几乎必然连续。

(2) 此解是一个Markov过程，它由下式定义的转移函数$P(s,X;t,A)$为Feller函数。

$$P(s,X;t,A)\triangleq P\{X^{sX}(t)\in A\} \quad t>s, A\in\mathscr{B}_l$$

(即A为l维Borel可测集)。其中$X^{sX}(t)$为下面方程的解：

$$X^{s,X}(t)=X+\int_s^t b(X^{s,X}(u),u)\,du+\sum_{r=1}^{k}\int_s^t \sigma_r(X^{s,X}(u),u)\,dW_r(u) \tag{2.11}$$

(3) 对于 $h\to 0$，转移函数 $P(s,X;t,A)$ 满足

$$\left.\begin{aligned}
&E[X^{s,X}(s+h)-X]=\int (Y-X)P(s,X;s+h,dY)\\
&\qquad\qquad =b(X,s)h+o(h^{3/2})\\
&E[(x_i^{s,X}(s+h)-x_i)(x_j^{s,X}(s+h)-x_j)]\\
&\qquad\qquad =a_{ij}(X,s)h+o(h^{3/2})\\
&P(s,X;h+s,U'_{\varepsilon}(X))=o(h^{3/2})
\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

这里所有估计 $o(\cdot)$ 在每有界区域内，关于 s,X，均为一致的，并且 $a_{ij}(X,s)$ 是矩阵 $A(X,s)$ 的元素，此矩阵对于所有 $\lambda\in E_l$，满足

$$(A(X,s)\lambda,\lambda)=\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(X,s),\lambda)^2=\sum_{i,j=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{k}\sigma_{ir}\sigma_{jr}\right)\lambda_i\lambda_j,$$

亦即

$$a_{ij}(X,s)=\sum_{r=1}^{k}\sigma_{ir}(X,s)\sigma_{jr}(X,s),\quad i,j=1,2,\cdots,l.$$

(4) 存在一个常数 k，它仅依赖于空间 E_l 的维数，条件(2.10)中的常数 B 和区间长度 $T-t_0$，并使得对所有 $s,t\in[t_0,T]$，有

$$E|X^{s,X}(t)-X|^4\leqslant k(t-s)^2(1+|X|^4).$$

(5) 如果方程(2.9)的系数与 s 无关，则对应 Markov 过程的转移函数是齐次的。

该定理的证明，均可在 Gihman 和 Skorohod[2] Dynkin[1] 中找到。定理中的矩阵 $A(X,s)$ 称为**扩散矩阵**，向量 $b(X,s)$ 称为**位移向量**。它们的概率意义，由(2.12)式是显然的。

以后，我们经常要考虑由方程(2.11)确定的 Markov 过程（通常称它为扩散过程）$X^{s,X}(t,\omega)$，並要经常计算关于 $X^{s,X}(t,\omega)$ 的自然 σ 代数 $\mathcal{N}^s$ 可测随机变数的期望（这里

$\mathcal{N}^s=\sigma\{X^{s,X}(t,\omega),\quad t>s\}$，即由事件：$\{X^{s,X}(t)\in A\}$，$A\in\mathscr{B}_l$，$s<t<\infty$ 产生的 σ 代数）。因此，我们经常以概率测度 $P_{s,X}$ 来替代 P，即 $P_{sX}\{X(t)\in A\}=P\{X^{s,X}(t)\in A\}$ $(A\in\mathscr{R}_l)$，并以 E_{sX} 来替代 E. 如果方程(2.9)的系数与 s 无关，则我们只需考虑过程 $X^{0,X}(t)$（因此时的解过程为齐次 Markov过程），並将它简记为 $X^X(t)$，类似地，此时将分别以 P_X 与 E_X 来替代 P 与 E。

五、扩散过程 $X^{t,X}(t)$ 的弱无穷小算子

让 C_2 记为 E 上，关于 $x_1,\cdots,x_l$ 二次连续可微且关于 t 连续可微的函数类。若 $V\in C_2$，则由定理2.1和2.2，有

$$V(X(t),t)-V(X(s),s)$$

$$=\int_s^t LV(X(u),u)\,du+\sum_{r=1}^k\int_s^t\left[\sigma_r,\frac{\partial V}{\partial X}\right]dW_r(u),\quad(2.13)$$

其中

$$LV(X,s)=\frac{\partial V(X,s)}{\partial s}+\sum_{i=1}^l b_i(X,s)\frac{\partial V(X,s)}{\partial x_i}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^l a_{ij}(X,s)\frac{\partial^2 V(X,s)}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$=\frac{\partial V}{\partial s}+\left[b,\frac{\partial}{\partial X}\right]V+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^l\left[\sigma_r,\frac{\partial}{\partial X}\right]^2V.\qquad(2.14)$$

此外，如果函数 V 和它的导数有界（或它的增长不快于一个 X 的线性函数），则计算(2.13)中的期望，並利用随机积分的性质以及 Fubini 定理，可得

$$E[V(X(t),t)-V(X(s),s)]=\int_s^t ELV(X(u),u)\,du.\quad(2.15)$$

将 $X(t)=X^{sX}(t)$ 代入上式，再以 $h=t-s$ 除以两端，并让 $t\to s+0$，易得

$$\lim_{h\to +0}\frac{1}{h}[E_{sX}V(X(s+h),s+h)-V(X,s)]$$

$$=LV(X,s), \tag{2.19}$$

因此，推得对于所有具有紧支柱的 $V\in C_2$，有

$$\tilde{A}V(X,s)=LV(X,s);$$

而且对于齐次过程有

$$\tilde{A}V(X)\equiv LV(X).$$

这里 $\tilde{A}$ 为方程(2.11)解过程 $X^{sX}(t)$ 的弱无穷小算子。

由(2.41)式定义的算子 L 称为 Markov 过程 $X^{sX}(t)$ 的**微分生成算子**。由定义，显然微分生成算子的概念是一个局部的概念，即 LV 在点 (X,s) 的值是由点 (X,s) 的任一小邻域内 V 的值所确定的。算子 L 的概率意义，对于任一函数 $V\in C_2$，由下面的引理给出。

引理2.3 设 $\{X(u),u\in[s,T]\}$ 为方程(2.9)的解过程，$V\in C_2$，τ_U 为过程 $X(u)$ 关于点 X 的某有界邻域 U 的**首出时**，且记 $\tau_U(t)=\tau_U\Lambda t=\min(\tau_U,\ t)$，此外，假设 $P\{X(s)\in U\}=1$，则

$$E[V(X(\tau_U(t),\tau_U(t))-V(X(s),s)]$$

$$=E\int_s^{\tau_U(t)}LV(X(u),u)du. \tag{2.17}$$

【证明】 $X(t)$ 的停止过程 $Y(t)=X(\tau_U(t))$，在此停时，它到达区域 U 的边界，並有 Itô 微分（见Dynkin[1]）

$$dY(t)=\chi_{\tau_U>t}(\omega)b(Y(t),t)dt$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\chi_{\tau_U>t}(\omega)\sigma_r(Y(t),t)dW_r(t).$$

（因为$\{\tau_U>t\}\in\tilde{\mathcal{N}}_t$，所以在此式中的 Itô 微分是确定的）利用定理 2.1 于过程 $Y(t)$ 和函数 V，我们有

$$
\begin{aligned}
&V(X(\tau_U(t)),\tau_U(t))-V(X(s),s)\\
&=\int_s^{\tau_U(t)}LV\,du+\sum_{r=1}^{k}\int_s^{\tau_U(t)}\left[\sigma_r,\frac{\partial V}{\partial X}\right]dW_r(u).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

（记$\int_s^{\tau_U(t)}\Phi dW(u)=\int_s^t\chi_{\tau_U>t}(\omega)\Phi dW(u)$，下同）由假设及随机积分的性质，即得(2.17)． ∎

〔注〕（1）在引理的假设下，随机变数 $V(X(t),t)$ 的期望不一定存在，因此公式（2.15）不一定成立。

（2）在公式（2.17）中，置 $X(s)=X$，并让 $t\to s+0$，即 $h=t-s\to+0$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}V&=\lim_{h\to+0}\frac{E_{s,X}V(X(\tau_U(s+h)),\tau_U(s+h))-V(X,S)}{E_{s,X}[\tau_U(s+h)-S]}\\
&=LV(X,S).
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

（2.19）式左端的算子 $\mathscr{U}$，可视为微分算子 L 的一个推广．此算子首先是由 Дынкин 在更一般的假定下引进的．

§2.2 关于解的正则性条件

一、问题的提出

由定理 2.2 推知，若对于所有 $t>t_0$，条件(2.10)成立，则方程(2.9)的解 $X(t)$，对所有的 $t>t_0$ 是确定且连续的．然而条件(2.10)稍许太苛刻些．例如，

$$
dx(t)=-x^3(t)dt+dw(t),x(0)=x_0
$$

对所有 $t>0$．直觉地，显然有唯一的解(因为位移系数“引

导”该运动到原点），但对此方程，条件(2.10)仅在x空间的一个紧区域中成立。对于本节最后的例2.5以及对于部分可观测的Markov过程的统计分析中所提出的一类重要的随机方程（见Stratonovič[4]，Sirjaev[6]），也有同样的类似情况。因此，必须去寻求方程(2.9)解的存在性与唯一性的其它较广的条件。本节的目的，就是对于Itô随机微分方程去证明与第1章的定理1.7和定理1.8相类似的定理。为此，我们先作如下的分析。

(1)如果条件(2.10)对于每柱体$U_n\times I$成立，则我们可以构造函数序列$b_n(X,t)$和$\sigma_r^{(n)}(X,t)$，使得对于$|X|<n$，有

$$b_n(X,t)=b(X,t);\quad \sigma_r^{(n)}(X,t)=\sigma_r(X,t),$$

并且对每一b_n和$\sigma_r^{(n)}$在E中几乎处处满足条件(2.10)，由定理2.2，则存在一个对应于函数b_n，$\sigma_r^{(n)}$的Markov过程序列$X_n(t)$。

(2)为了简单起见，仅限于讨论$X(t_0)$的分布在E_l中有紧支柱的情形。此时，对一切$m\geqslant n$，显然直觉地有（也可严格的证明，见Dynkin[1]）过程$X_m(t)$关于集$|X|<n$的首出时是恒同的，记此公共值为τ_n。此外，还有直到τ_n，这些过程本身是重合的，即

$$P\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant \tau_n}|X_n(t)-X_m(t)|>0\}=0,\quad m\geqslant n.$$

(3)让τ记为当$n\to\infty$时，单调递增序列τ_n的（有限或无穷）极限，并称此随机变数τ为样本函数关于每有界区域的首出时，或简称为逸出到无穷的时间。这样定义是自然的，因为容易表明，如果我们以任意其它方式扩张的有界区域序列，它使得从原点到边界的距离趋于无穷，来替代区域U_n

$=\{|X|<n\}$，则 τ 的值不变。

(4) 对于 $t<\tau_n$，我们以 $\tilde{X}(t)=X_n(t)=X(t\wedge\tau_n)$ 来定义一个新的过程 $\tilde{X}(t)$．可以证明，对于 $t<\tau$，它是一个 Markov 过程，事实上，因为一个 Markov过程的停止过程仍是一个 Markov过程（关于Markov过程的停止过程，见Dynkin[1]）。

基于上面的分析，我们引进下面的正则性的概念。

定义2.2 称过程 $X(t)$ 是**正则的**，如果

$$P\{\tau=\infty\}=1, \tag{2.20}$$

其中 τ 为过程 $X(t)$ 的生存时间。(2.20)意即过程 $X(t)$ 以概率1无有限逸时（见第1章§1.2），换言之，如果条件(2.20)满足，则过程 $X(t)$，对所有 $t\geqslant t_0$ 是几乎必然确定的。对于满足定理2.2假设的过程，正则性从连续性推导，下面我们来讨论关于解的正则性的更一般的条件。

二、关于解的正则性条件

定理2.4 假设条件(2.10)在每柱体 $U_R\times I$ 中成立，此外在域 E 上存在一个非负函数 $V\in C_2$．使得对某个常数 $C>0$，有

$$LV\leqslant CV, \tag{2.21}$$

$$V_R=\inf_{|x|\geqslant R}V(X,t)\longrightarrow\infty,\ \text{当}\ R\to\infty\ \text{时}. \tag{2.22}$$

则定理2.2结论的第(1)，(2)和(5)部分成立。如果在(2.12)中的期望均以"截尾"期望来替代（即例如，替代 $E[X^{s,X}(s+h)-X]$，我们考虑 $E\chi(\omega)[X^{s,X}(s+h)-X]$，其中 $\chi(\omega)$ 为集合 $\{\omega:(X^{s,X}(s+h)-X)<k\}$ 的示性函数），则结论的第(3)部分也成立。此外，过程满足不等式

$$EV(X(t),t)\leqslant EV(X(t_0),t_0)e^{C(t-t_0)}, \tag{2.23}$$

如果右端期望存在。

【证明】 首先证明在(2.21)和(2.22)的假设下，前段构造的过程$\tilde{X}(t)$是正则的。为此，令

$$W(X,t)=V(X,t)\exp\{-C(t-t_0)\}$$

于是

$$LW=\exp\{-C(t-t_0)\}(VL-CV)\leqslant 0 \quad (\text{由}(2.21)),$$

故由引理2.3，对于$\tau_n(t)=\tau_n\wedge t$，有

$$E\{V(X(\tau_n(t),\tau_n(t))\exp[-C(\tau_n(t)-t_0)]\}-EV(X(t_0),t_0)$$
$$=E\int_{t_0}^{\tau_n(t)}LW(X(u),u)du\leqslant 0.$$

由于$\tau_n(t)=\tau_n\wedge t\leqslant t$，且$V\geqslant 0$，我们有

$$\int_{\{\tau_n<t\}}V(X(\tau_n),\tau_n)P(d\omega)\leqslant EV(X(\tau_n(t)),\tau_n(t))$$
$$\leqslant e^{c(t-t_0)}EV(X(t_0),t_0) \quad (2.24)$$

由(2.24)，我们导得估计：

$$P\{\tau_n<t\}\leqslant\frac{e^{c(t-t_0)}EV(X(t_0),t_0)}{\inf\limits_{|X|\geqslant n,u>t_0}V(X,u)}.$$

让$n\to\infty$并利用(2.22)，即得(2.20)。从而对于所有$t\geqslant t_0$过程$\tilde{X}(t)$是方程(2.9)的一个解，此解以概率1唯一。事实上，由$\tilde{X}(t)$的定义以及在区域$|X|\leqslant n$中解的唯一性推得，对每对解$X(t),Y(t)$有

$$P\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant\tau_n}|X(t)-Y(t)|>0\}=0.$$

其次，对于$\tilde{X}(t)$的其他各种性质，可以类似的方法证之。例如，可以通过让(2.24)中的$n\to\infty$并利用Fatou引理来证明关系式(2.23)。在我们构造过程$\tilde{X}(t)$时，我们是假设了$X(t_0)$的分布有紧支柱，对于任意初始分布的情形，可按

Gihman 与 Skorohod[2] P512—514 的方法来处理。

〔注〕（1）一个过程是否正则，直观上似乎仅依赖于无穷远点邻域中系数 b 和 σ_r 的性态，因此自然期望，如果满足条件（2.21），（2.22）的函数 V 只在区域 $U_R' \times \{t>0\}$（对某个 $R>0$）中存在，则定理 2.4 的结论仍然成立。从定理 2.4 的证明易见，在此情形，在它从集 $|X|>R$ 离开之前，此样本函数不可能逸出到无穷，利用过程的强 Markov 性，我们容易给出在定义 2.3 的意义下，此过程也是正则的，详细的证明，留给读者作为练习。

（2）设 D 为一开集，$\{D_n\}$ 为闭包含于 D 中的递增开集序列，並使得 $\bigcup_n D_n = D$，则我们可得到下面的结果：

假设在每柱体 $D_n \times I$ 中，系数 b 和 σ_r 满足条件（2.10），並在 $D \times I$ 中存在一个关于 X 二次连续可微，关于 t 连续可微的函数 $V(X,t)$，它满足条件（2.21）和条件：

$$\inf_{t>0,\, X \in D \setminus D_n} V(X,t) \to \infty, \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时。}$$

另外还有 $P\{X(t_0)\in D\}=1$，则定理 2.4 的结论成立，並且此解满足关系式

$$P\{X(t)\in D\}=1, \quad \text{对于所有的 } t\geq t_0.$$

（后一结论表明，此扩散过程的样本函数在任一有限时刻都几乎必然地不会从给定的开集 D 离开。这一结论在某些情形是很有用的。）

下面的定理表明，条件 (2.21)，(2.22) 在某种意义下，或许是"最好"的。

定理2.5 假设在每柱体 $U_R\times\{t>0\}$ 中，条件 (2.10) 成立，此外在域 $E=E_1\times\{t>0\}$ 中，存在一个非负有界函数 $V(X,t)\in C_2$，使得对于某个 $C>0$，有

$$LV \geq CV. \tag{2.25}$$

则对于所有使得 $V(X,s)>0$ 的点 (X,s)，由方程 (2.11) 定义的过程 $X^{s,X}(t)$，有

$$P\{\tau^{s,X}-s \leq \frac{1}{C}\ln(\sup_E V/V(X,s))+\varepsilon\}>0, \quad \text{对每个 } \varepsilon>0.$$

【证明】 完全类似于定理 2.4 的证明，利用引理 2.3 和

条件(2.25)，有

$$EV(X(\tau_n^{sX}(t)),\tau_n^{sX}(t)\exp\{-C(\tau_n^{sX}(t)-s)\}>V(X,s).$$

因为V是有界的，从而有

$$E\exp\{-C(\tau_n^{sX}(t)-s)\}\sup_x V>V(X,s).$$

让$n\to\infty$，並置$\tau^{sX}(t)=\tau^{sX}\wedge t$(其中$\tau^{sX}$为过程$X^{sX}(t)$关于每有界域的首出时，亦即$\tau^{sX}{}_n\uparrow\tau^{sX}$)，有

$$E\exp\{-C(\tau^{sX}(t)-s)\}\sup_x V>V(X,s), \qquad (2.26)$$

假设对于某个$t\geqslant s+\frac{1}{C}\ln(\sup_x V/V(X,s))>s$，有

$$P\{\tau^{sX}>t\}=1,$$

则由(2.26)有

$$\exp\{-C(t-s)\}>V(X,s)/\sup_x V,$$

从而

$$t<S+\frac{1}{C}\ln(\sup_x V/V(X,s)),$$

这与$(t-s)\geqslant\frac{1}{C}\ln(\sup_x V/V(X,s))$的假设矛盾！由此矛盾得$P\{\tau^{sX}\leqslant t\}>0$，现令$t=s+\frac{1}{C}\ln(\sup_x/V(X,s))+\frac{\varepsilon}{2}$，即得

$$P\{\tau^{sX}-s<\frac{1}{C}\ln(\sup_x V/V(X,s))+\varepsilon\}>0. \quad ■$$

三、关于不正则解的延拓

现在要讨论在定理2.5的假设下，当过程$X^{sX}(t)$是不正则时所出现的情况。在此情形下，方程(2.11)所决定的过程$X^{sX}(t)$仅定义在$[s,\tau^{sX}]$上，试问，对于$t>\tau^{sX}$，该过程应如何延拓？就延拓的方法而言，它可以有无穷多种，例如，我们可以令$X^{sX}(\tau^{sX}+0)=Y(\in E_l)$(散逸到无穷后，突跃

到点Y)，并且我们还可以规定其它条件来确定在$\tau^{\varepsilon X}$之后过程的发展.有关 Markov 过程，在样本函数击中边界时刻之后延拓的文献很多，此问题是紧密地与各种到达边界的可能方式相联系的。由方程(2.11)定义的一维时齐过程情形，已由 Feller[6] 和 Ventcel[7] 完整地研究过。对于多维情形，最有意义的结果是由 Ventcel[8]，Ueno[9] 以及其他人得到的。

四、例

下面我们来考察几个例子。

例2.1 设条件(2.10)在E中几乎处处成立，则函数$V=(|X|^2+1)^{n/2}$，对每个$n>0$,满足定理2.4的假设，因此方程(2.9)的解$X(t)$存在並且在每有限时间区间上是几乎必然有界的（此结果由定理2.2推得），此外，对某个常数C_n，我们有估计

$$E|X(t)|^n<e^{C_n(t-t_0)}E|X(t_0)|^n.$$

此例说明，满足全局性的条件(2.10)的解过程一定是正则的。

例2.2 假设条件(2.10′)在每有界X区域中成立，并且对$X\in E_l$，有

$$|b|<B(1+|X|\ln|X|), \tag{2.27}$$

$$\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r|^2<B(1+|X|^2\ln|X|). \tag{2.28}$$

则利用辅助函数$V=\ln(|X|^2+1)$，並应用定理2.4，我们得到方程(2.9)的解是正则的。

由(2.27)推得，纯量积$[b(X,s),X]$，当$X\to\infty$时的增长率不快于$|X|^2\ln(|X|^2+1)$.下面的例子表明，如果$[b(X,$

s), X]的增长率再稍高些，则过程就不是正则的了。

例2.3 假设条件(2.28)成立，并且对某个 $\varepsilon>0$,

$$[b(X,s),X]>|X|^2(\ln|X|^2+1)^{1+\varepsilon},$$

则对每一初始条件，过程 $X(t)$ 就不是正则的了。为证此，只要利用具有辅助函数

$$V(X)=\exp\{-[\ln(|X|^2+1)]^{\varepsilon}\}$$

的定理2.5即可。

在该例中，由于大的位移，样本函数有有限逸时（这种现象，对于 $\sigma=0$ 时也发生。见第1章 §1.2 的例子)。去寻求一个由于大的扩散而导致不正则的例子是困难的。

例2.4 在 E_1 中考虑由方程(2.9)定义的过程 $x(t)$，则 b 和 σ 均为纯量函数，并且算子 L 为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+b(x,s)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

利用例2.3中同样的辅助函数，易见，如果

$$\sigma^2>B(x^2+1)[\ln(x^2+1)]^{1+\varepsilon},$$

则对每一关于变数 x 的增长至多是线性的函数 $b(x,s)$，过程 $x(t)$ 是不正则的，然而当函数 $|b(x,s)|$ 的增长快于线性时，则过程可以是正则的。例如，当 $b(x,s)=-x^5$ 并且 $\sigma=x^3$，其正则性从定理2.4推得，这里我们应当取辅助函数为 $(x^2+1)^{\alpha}$。

例2.5 即使对于定常强度 σ^2 的白噪声驱动的Van der Pol方程所描述的熟知的雷达工程系统，定理2.2的假设不成立。此系统可由Itô方程

$$dx_1=x_2dt,\quad dx_2=[-x_1+\varepsilon(1-x_1^2)x_2]dt+\sigma dW(t)$$

来描述。取辅助函数

$$V=\frac{1}{2}\left[x_2+\varepsilon\left(\frac{x_1^3}{3}-x_1\right)\right]^2+\frac{x_1^2}{2}+\frac{\sigma^2}{4\varepsilon}$$

它满足定理2.4的假设，因为

$$\begin{aligned}LV&=x_2\frac{\partial V}{\partial x_1}+[\varepsilon(1-x_1^2)x_2-x_1]\frac{\partial V}{\partial x_2}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\\&=-\varepsilon\frac{x_1^4}{3}+\varepsilon x_1^2+\frac{\sigma^2}{2}\leqslant 2\varepsilon V.\end{aligned}$$

所以此过程是正则的。

§2.3 随机微分方程与偏微分方程

在§2.1中我们已看到，由(2.14)式定义的Markov过程的微分生成算子L是一个偏微分算子。因此，在对随机微分方程(2.1)解的性质研究中，有时自然地就要联系到线性抛物方程或椭圆方程定解问题的研究。为此，我们将通过它们之间的联系，来建立一些研究(2.1)解的稳定性所需要的结果，这就是本节的目的。

一、有关偏微分方程知识的回顾*

1. 方程的类型

考虑线性偏微分算子：

$$\mathscr{L}u\triangleq\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{l}b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(X)u \qquad (2.29)$$

其中$a_{ij}(X)$，$b_i(X)$，$C(X)$均定义在$U(\subset E_l)$中且取值于E_1。

在点X_0，$\mathscr{L}$是称为**椭圆型**（或椭圆的），如果矩阵

* 见Friedman[15]第六章。

$(a_{ij}(X_0))$是正定的，即对任意实向量$\lambda\in E_l$，$\lambda\neq 0$，有

$$\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(X_0)\lambda_i\lambda_j>0.$$

如果对所有$X\in U$，$\lambda\in E_l$，存在一个正常数μ，使得

$$\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j\geqslant\mu|\lambda|^2,$$

则称$\mathscr{L}$在U中是**一致椭圆型**。

考虑偏微分算子：

$$\mathscr{M}u\triangleq\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{l} b_i(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$+C(X,t)u-\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.30}$$

它具有定义在$U\times(a,b)\subset E$中的实系数。

$\mathscr{M}$在点(X_0,t_0)是称为**抛物型**（或抛物的），如果对于所有$\lambda\in E_l$，$\lambda\neq 0$，有$\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(X_0,t_0)\lambda_i\lambda_j>0$。

称$\mathscr{M}$在$U\times(a,b)$中是**一致抛物型**，如果存在一个正常数$\mathscr{M}$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(X,t)\lambda_i\lambda_j\geqslant\mathscr{M}|\lambda|^2,\text{对所有}(X,t)\in U\times(a,b),\lambda\in E_l.$$

2. 定解问题

（1）第一类边值问题。

寻求下列边值问题：

$$\mathscr{L}u(X)=f(X),\qquad X\in U \tag{2.31}$$
$$u(X)=\phi(X),\qquad X\in\partial U=\Gamma; \tag{2.32}$$

的解u的问题，称为**Dirichlet问题或第一类边值问题**。换言之，第一类边值问题就是要寻求这样的一个函数$u(X)$，它在U内满足方程(2.31)，而在Γ上取给定的ϕ值（此意味着，u在$U+\Gamma$上连续，而在边界Γ上与给定在其上的函数

ϕ 完全相同）。

(2)第二类边值问题。

第二类边值问题又称为 **Neumann 问题**。在一个由具有连续转动的切平面的曲面 Γ 所围成的有界区域 U 上，寻求这样的一个函数 $u(X)$，它在 U 内满足方程(2.31)，在 $U+\Gamma$ 上连续，而且 u 在 U 的边界面上每点的外法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 等于已知函数 ϕ 在这点的值。

(3)初值问题。

初值问题亦称为 **Cauchy 问题**，它是寻求下列问题的定解问题：

对于给定的 f 和 ϕ，考虑抛物方程：

$$\mathscr{M}u=f(X,\ t),\ (X,\ t)\in E_l\times(0,\ T] \qquad (2.33)$$

且具有初始条件

$$u(X,0)=\phi(X),\text{在}E_l\text{上}。 \qquad (2.34)$$

(4)混合问题。

混合问题，就是所谓**初值-边值问题**。它又可分为第一类初-边值问题与第二类初-边值问题。

3.抛物算子的基本解概念

$E_l\times[0,\ T]$ 中的物抛算子 $\mathscr{M}=\mathscr{L}+\frac{\partial}{\partial s}$ 的**基本解**，是对于 $E_l\times[0,T]$ 中所有 (X,s) 和 (Y,t) $(t>s)$ 有定义且满足下列条件的函数 $P(s,X;t,Y)$：

对每个 t，关于 X 有紧支柱的任一连续函数 $f(X,t)$，函数

$$u(X,s)=\int_{E_l}f(Y,t)P(s,\ X;\ t,\ Y)dY,$$

满足

$$\mathscr{L}u+\partial u/\partial s=0,\ \text{如果}X\in E_l,\ 0\leqslant s<t,$$

$$u(X, s) \longrightarrow f(X, t), \text{ 如果 } S \uparrow t.$$

注意，这里的抛物算子 $\mathscr{M}$ 是向后算子，而在(2.30)中，它是向前算子。

4.广义解的概念

在偏微分方程中我们知道，要某些基本定解问题的解存在，则必须对给定在区域边界上的那些函数（或初始函数）加上很强的光滑条件，但在实际中这种很强的光滑条件不一定满足，从而对应的定解问题，通常就不可能有一个可微的解存在，为此必须引进所谓"广义解"的概念。

广义解的概念是由 Cобóлев 引进的，并由他系统地加以引用。根据他的提法，如某一微分方程组，在区域 U 内，有一个解的无穷序列 $(u_1^{(k)}, \cdots, u_l^{(k)})$ $(k=1,2,\cdots)$ 存在，并且它一致收敛于 $(u_1, \cdots, u_l)$，即

$$\sup_{X \in U} \sum_{i=1}^{l} |u_i(X) - u_i^{(k)}(X)| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

成立，则我们称函数组 $u_1, \cdots, u_l$ 为该微分方程组在区域 U 内的广义解。

Cобóлев 同样也称每一具有下述性质的函数 u 是某一微分方程在区域 U 内的广义解，如果由此方程的狭义解所组成的某一序列**平均收敛**于 u。亦即如果 $u^{(k)}$ 是方程的狭义解所组成的某一序列，并且当 $k \to \infty$ 时，有

$$\int_U [u - u^{(k)}]^2 dX \to 0,$$

则函数 u 就称为此方程的广义解。易见，如此定义的广义解，甚至可能是不连续的。

5.关于椭圆方程的极大原理

对于方程(2.29)，我们有

定理 2.6（弱极大原理） 假设 $(a_{ij}(X))$ 对于所有 $X\in U$ 是非负定的，並且 $C(X)\leqslant 0$，以及

$\frac{1}{2}a_{11}(X)\lambda^2+b_1(X)\lambda>0$，对于某 $\lambda>0$ 和所有 $X\in U$，

如果 $u\in C_2(U)\cap C(\bar{U})$，且在 U 中 $\mathscr{L}u\geqslant 0$，并且

$$\max_{\bar{U}} u(X)>0,$$

则

$$\sup_{X\in U} u(X)\leqslant \max_{X\in\partial U} u(X).$$

这里 $\bar{U}$ 为 U 的闭包，∂U 为 U 的边界。

于是如果在 $\bar{U}$ 中，u 取正值，则 u 在 $\bar{U}$ 中的极大是在 ∂U 上达到，当然它也可在 U 的点上同时达到。

定理 2.7（强极大原理） 让 $\mathscr{L}$ 为在 U 的紧子集中具有有界系数的一致椭圆算子，並假设在 U 中 $C(X)\leqslant 0$，如果 $u\in C_2(U)$ 且在 U 中 $\mathscr{L}u\geqslant 0$，並且如果 $u(X)\neq$ 常数，则 u 在 U 中不可能达到一个正的极大。

应用此结果于 $-u$，我们得到，如果在 U 中 $\mathscr{L}u\leqslant 0$ 並且 $u(X)\neq$ 常数，则 u 在 U 中不可能达到一个负的极小。

6.关于抛物方程的极大原理

对于方程(2.30)，我们有

定理2.8（弱极大原理） 对于 $U\times(a,b)\subset E$ 中的所有 (X,t)，让 $(a_{ij}(X,t))$ 为非负定矩阵，並假设 $C(X,t)\leqslant 0$。如果 $u\in C(\bar{Q})$，$u_{x_i}, u_{x_ix_j}, u_t$ 均属于 $C(Q_0)$，並且如果在 Q_0 中，有 $\mathscr{M}u\geqslant 0$，$\max_{\bar{Q}} u>0$，则

$$\sup_{(X,t)\in Q_0} u(X,t)\leqslant \max_{(X,t)\in\partial_0 Q} u(X,t),$$

这里 $Q=U\times(a,b)$，$\bar{Q}$ 为 Q 的闭包。

假设 Q 位于 $E_l\times(0,T)$ 中，並定义

$D_T=\{(X,T):(X,T-\delta)\in Q$, 对所有 $O<\delta<\delta_0$, δ_0依赖于$X\}$

$Q_0=Q\cup D_T$, ∂Q 为 Q 的边界，$\partial_0 Q=\partial Q\setminus(\inf D_T)$

定理2.9（强极大原理） 让$\mathscr{M}$为在 Q 中具有有界系数的一致抛物算子，並假设 $C(X,t)\leqslant 0$。如果 $u, u_{x_i}, u_{x_ix_j}, u_t$ 在 Q中均连续并且在 Q 中有$\mathscr{M}u\geqslant 0$。另外，如果 u 于 Q 中在点 $P_0=(X_0,t_0)$处取得一个正的极大，则对于所有$P\in S(P_0)$，有 $u(P)=u(P_0)$。

这里 $S(P_0)$记为可通过 Q 中的一简单连续曲线（沿此曲线，从 P 到 P_0，t 坐标是不减的）与 P_0 联结的所有 Q 中的点P的集合。

二、偏微分方程解的随机表现

如果算子L(椭圆的或抛物的)就是扩散过程 $X(t)$的微分生成算子，则它的解就可借助于扩散过程 $X(t)$的某个泛函的期望来加以表现，此种表现就称为**解的随机表现**．关于这方面的文献很多，下面我们仅就一些特殊情形来加以讨论，其结果均以引理的形式来给出。

1．齐次方程 $Lf=0$ 的情形

下面我们讨论的算子：

$$L=\frac{\partial}{\partial s}+\sum_{i=1}^{l}b_i(X,s)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{l}a_{ij}(X,s)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},$$

它即为扩散过程 $X(t)$的微分生成算子（后面的时齐情形，亦同样以符号 L表之）。

引理2.10 假设

(i) $f(X,s)$在域 $U\times(t_0,t)(U\subset E_l)$的闭包上有界连续且在此域上满足方程 $Lf=0$。

(ii)存在一个生存时间为 τ_U，伴随算子为 L 的唯一和正则（如果 U 无界）的 Markov 过程 $X(t)$。则 f 有如下的随机表现：

$$f(X,s)=E_{X,s}f(X(\tau_U(t)),\tau_U(t)). \qquad (2.35)$$

【证明】 (1)U 为有界域情形。

考虑 $U^{(n)}\uparrow U$，对每一 n，定义 $f_n(X,s)$，使当 $X\in U^{(n)}$ 时，有 $f_n(X,s)=f(X,s)$ 且 $f_n(X,s)\in C_2$，于是由引理2.3及假设，有

$$E_{X,s}f(X(\tau_{U^{(n)}}(t)),\tau_{U^{(n)}}(t))-f(X,s)$$

$$=E_{X,s}\int_s^{\tau_{U^{(n)}}(t)}Lf(X(u),u)du=0,$$

因 f 有界、连续且 $\tau_{U^{(n)}}(t)\uparrow\tau_U(t)$，故由控制收敛定理有

$$E_{X,s}f(X(\tau_U(t)),\tau_U(t))$$

$$=\lim_{n\to\infty}E_{X,s}f(X(\tau_{U(n)}(t),\tau_{U(n)}(t))=f(X,s)$$

(2)U 为无界域情形。

考虑截尾区域序列 $U_n=U\cap\{|X|<n\}$，显然 $U_n\uparrow U$，设 τ_{Un} 为 $X^{sX}(t)$ 关于 U_n 的首出时，τ_U 为它关于 U 的首出时，τ 为它关于 U 的每有界域的首出时，由设 $X^{sX}(t)$ 是正则的，故 $P\{\tau=\infty\}=1$，从而或对某一 n 有 $\tau_{Un}=\tau_U$ 或 $\lim_{n\to\infty}\tau_{Un}=\tau_U=\tau$，于是在每 U_n 中利用(1)得

$$f(X,s)=E_{X,s}f(X(\tau_{Un}(t)),\tau_{Un}(t)),$$

再利用控制收敛定理取极限，即得(2.35)。 ▌

〔注〕 (1)因当 $\tau_u\leqslant t$ 时，$X(\tau_u(t))=X(\tau_u)$（此时它位于 U 的边界上），当 $\tau_u>t$ 时，$X(\tau_u(t))=X(t)$，故过程 $X(\tau_u(t)$ 几乎必然的位于柱体 $U\times[t_0,t]$ 的侧面或它的上底 $U\times\{s=t\}$ 上。若令

$$\Gamma_1=(\Gamma\times[t_0,t])\cup(U\times\{s=t\})$$

（这里 $\Gamma=\partial U$），于是由引理 2.10 推得：在引理 2.10 的假设下 Dirichlet 问

题：

$$Lu=0,\quad (X,\ s)\in U\times(t_0,\ t),$$

$$u(X,\ s)=\phi(X,\ s),\quad (X,\ s)\in \Gamma_1$$

至多存在一个解，若有解，则此解即为

$$u(X,\ s)=E_{X,s}\phi(\ X(\tau_u(t)\ ),\ \tau_u(t)\ ).$$

事实上，由（2.35）有 $u(X,\ s)=E_{X,s}u(\ X(\tau_u(t)),\tau_u(t)\ )$.（因

$$(\ X(\tau_u(t)),\tau_u(t)\ )\in\Gamma_1\ )=E_{X,s}\phi(\ X(\tau_u(t)),\tau_u(t)\ )$$

（2）如果 $U=E_l$，则从（2.35）推得，关于抛物方程 Cauchy 问题：

$$Lu=0,\quad (X,s)\in E_l\times(t_0,t),$$

$$u(X,t)=f(X,t),\quad X\in E_l$$

解的一个公式：

$$u(X,s)=E_{X,s}f(X(t),t)=\int_{E_l}f(Y,t)P(S,X;\ t,dY).\qquad (2.36)$$

注意，其中 E 是向后算子.

事实上，由过程的正则性，有 $P\{\tau_u=\infty\}=1$，从而 $\tau_U(t)=t$，故由（2.35）即得.

（3）将(2.36)与通过基本解 $P(s,X;t,Y)$ 来表出抛物方程 Cauchy 问题：

$$Lu=0,\quad (X,s)\in E_l\times(t_0,t),$$

$$u(X,s)\to f(X,t),\quad S\uparrow t$$

解的公式

$$u(X,s)=\int_{E_l}f(Y,t)P(s,X;t,Y)dY$$

相比较，可看出，如果方程 $Lu=0$ 有一个基本解，则（2.36）中转移函数 $P(s,X;\ t,A)$ 有一个关于 E_l 中Lebesgue 测度的密度，並且此密度即为基本解 $P(s,X;\ t,Y)$.

（4）如果区域U是有界的，则引理2.10的结论成立．例如，如果我们要求在域$U\times(t_0,t)$内，系数b,σ，满足条件(2.10)．对于无界区域 U，只要求条件（2.10）在每紧集内成立並且存在一个满足条件（2.21）（2.22）的函数V(见定理2.4）即可．

（5）在偏微分方程理论中，一个熟知的事实是对于一个抛物方程的混合问题和 Cauchy 问题，解存在的一个充分条件是除了（2.10）外，还满足下面的非退化条件：

$$\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X,s)\lambda_i\lambda_j\geq m(X,s)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2\ .\qquad (2.37)$$

（这里的 $m(x,s)$ 是 R 上的一个正的连续函数）。因此，如果(2.37)成立，则存一个在 Γ_1 上取给定值並使得 $Lf=0$ 的函数 f，从而公式（2.35），（2.36）提供了关于方程 $Lu=0$ 的这类边值问题的经典解。如果由（2.35）或（2.36）定义的函数是不可微的，则我们可考虑它为方程 $Lu=0$ 的一个广义解（容易证明，它满足方程 $\mathscr{A}u=0$，见(2.19)）。然而可以表明，为了使得由（2.36）定义的函数 $f(X,t)$ 是可微的，条件（2.37）不必成立，只要初始函数 $f(X,t)$ 是充分光滑的即可（例如，见 Gihman 与 Skorohod[23]）。这种情形不同于混合问题解的情形。

对于齐次扩散过程 $X(t)$，对应于引理 2.10，我们有下面的引理。

引理2.11 假设

(i)系数 b 和 σ_r 均与 t 无关且在每有界区域中满足条件(2.10)；

(ii)$f(X)$ 在 U 中二次连续可微，在 U 的闭包上连续且满足方程 $Lf=0$；

(iii)如果

$$P_X\{\tau_U<\infty\}=1, \quad X\in U. \tag{2.38}$$

则有

$$(a)\ f(X)=E_Xf(X(\tau_U))=\int_\Gamma P_X\{X(\tau_U)\in dY\}f(Y) \tag{2.39}$$

(b)如果过程 $X(t)$ 是正则的，且 $f(X)$ 在 U 中有界，则(2.39)对于无界区域 U，仍然成立。

【证明】 我们只要对 $f(X)\in C_2$ 的情形来证明即可，因对一般情形可如同引理 2.10 的证明一样处理。如 $f\in C_2$，则由引理 2.8，对每一 t 有

$$\begin{aligned}f(X)=E_Xf(X(\tau_U(t)))=&E_X\{f(X(\tau_U))\chi_{\tau_U\leq t}(\omega)\}\\&+E_X\{f(X(t))\chi_{\tau_U>t}(\omega)\},\end{aligned}$$

让 $t\to\infty$，並由(2.38)即得

$$f(X)=E_X f(X(\tau_U))=\int_{\Gamma} P_X\{X(\tau_U)\in dY\}f(Y). \qquad \blacksquare$$

类似于前面的注，对于齐次过程情形，我们有

(iii) 如果条件(2.38)成立，则由引理2.11推得，对于"椭圆"方程：

$$\sum_{i=1}^{l} b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=0$$

的边界Dirichlet问题，在区域U中至多有一个解。由偏微分方程理论我们知道，如果系数满足条件(2.19)和(2.37)，则Dirichlet问题有一个解。如果条件(2.37)不成立，则广义解(2.39)可以是不连续的。

3. 非齐次方程情形

下面我们来研究非齐次方程

$$Lf=-g \tag{2.40}$$

解的随机表现。为了简单起见，仅考虑零边界条件。

引理2.12 设

(i) $U\subset E_l$为有界区域，$g(X,s)$有界连续，

$$f(X,s)\in C_2(U\times(t_0,t))$$

且f在$U\times(t_0,t)$的闭包上连续。

(ii) 条件(2.10)在X的每有界域中成立，则

Dirichlet问题：$\begin{cases} Lf=-g, & (X,s)\in U\times(t_0,t); \\ f(X,S)=0, & (X,s)\in\Gamma \end{cases}$

的解，有如下的随机表现：

$$f(X,S)=E_{XS}\int_{s}^{\tau_U(t)} g(X(u),u)du. \tag{2.41}$$

如果过程$X(t)$是正则的，并且函数f和g在$U\times(t_0,t)$中均有界，则此表现对于一个无界域U仍是正确的。

证明类似于引理2.10和2.11，留给读者作为练习。

对于齐次过程$X(t)$，我们有

引理2.13 设

(i)系数b和σ_r与t无关，並且它们在每一有界域中满足条件(2.10)；

(ii)$g(X)$在$U+\Gamma$中连续有界，$f(X)$在U中二次连续可微且有界；

(iii)对$X\in U$，有

$$E_X\tau_U<C(C\text{ 为一正常数})，\tag{2.42}$$

则Dirichlet问题

$$\begin{cases} Lf=\sum_{i=1}^{l}b_i(X)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=-g, \\ f(X)=0, \quad X\in\Gamma \end{cases}$$

的解有如下的随机表现：

$$f(X)=E_X\int_0^{\tau_U}g(X(t)dt.$$

证明类似于引理2.11。

〔注〕 如果U是一个有界区域，在该区域中具有函数$m(X,s)=m(X)$(其在U的闭包上是正的)的非退化条件(2.37)成立，则条件(2.42)满足(证明从略)。对于一个无界区域，条件(2.42)一般不成立，从而引理2.13失效。

§2.4 某些辅助结果

本节的目的是讨论沿Itô方程解轨道的Ляпунов函数的上鞅性质，为后面的稳定性理论的研究作准备。为此，所得到的结果也均以引理的形式给出。

一、鞅、上鞅与下鞅

设$(\Omega,\mathscr{U},P)$为一概率空间，$\{\mathscr{M}_t,t\geq 0\}$为一递增的$\sigma$代

数族($\mathscr{M}_t \subseteq \mathscr{U}$)。

定义2.3 设$\{y(t,\omega), t \geqslant 0\}$为一具有有限期望的随机过程，使得对每一$t \geqslant 0$, $y(t,\omega)=y(t)$是$\mathscr{M}_t$可测的；如果对任意的$0 \leqslant s \leqslant t$，有

$$E[y(t) \mid \mathscr{M}_s] \leqslant y(s). \quad a.s.(P) \qquad (2.43)$$

则称$\{y(t,\omega), t \geqslant 0\}$为$\mathscr{M}_t$**上鞅**。如果将(2.43)中的不等号反向，则称它为$\mathscr{M}_t$**下鞅**。如果将(2.43)中的不等号改为等号，则称它为$\mathscr{M}_t$**鞅**。

例2.6 设$\{W(t), t \geqslant 0\}$为Wiener过程，则$W(t)$是一个$\mathscr{N}_t$鞅(这里$\mathscr{N}_t \triangleq \sigma\{W(S), 0 \leqslant S \leqslant t\}$)。

事实上，因

$$E[W(t) \mid \mathscr{N}_s] = E\{[W(s) + (W(t) - W(s))] \mid \mathscr{N}_s\}$$
$$= W(s). \quad a.s.$$

例2.7 对更一般的过程：$y(t) = \int_0^t \sigma(s)\, dW(s)$也是一个$\mathscr{N}_t$鞅。(这里$\sigma(s)$满足：$E\int_0^t |\sigma(s,\omega)|^2 ds < \infty$)

事实上，由随机积分定义知$y(t)$关于$\mathscr{N}_t$可测，再由随机积分性质(2.3)，若，$0 \leqslant s < t$，则有

$$E[y(t) \mid \mathscr{N}_s] = E[\int_0^t \sigma(u) dW(u) \mid \mathscr{N}_s]$$
$$= E[(\int_0^s \sigma(u) dW(u) + \int_s^t \sigma(u) dW(u) \mid \mathscr{N}_s]$$
$$= E[y(s) \mid \mathscr{N}_s] + E[\int_s^t \sigma(u) dW(u) \mid \mathscr{N}_s]$$
$$= y(s). \quad a.s.$$

鞅论对于稳定性问题的一系列应用，主要是基于下面的上鞅收敛定理和鞅不等式。此处对这两个定理，我们叙而不

证（有兴趣的读者可参见 Doob 的随机过程）。

定理2.14 若$\{y(t,\omega),\mu_t,t\geqslant 0\}$是一个正上鞅，则极限$y_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}y(t,\omega)$几乎必然存在并且是有限的，进而

$$Ey_\infty=\lim_{t\to\infty}Ey(t,\omega).$$

定理2.15 若$\{y(t,\omega),\mathscr{M}_t,t\geqslant 0\}$是一个上鞅（下鞅），则对任一$\varepsilon>0$，有

$$P\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|y(t,\omega)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{E|y(t_0,\omega)|}{\varepsilon}$$

$$(P\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|y(t,\omega)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{E|y(T,\omega)|}{\varepsilon}).$$

二、沿 Itô 方程解轨道的 Ляпунов 函数的上鞅性质

引理2.16 设$V(X,t)\in C_2(U\times I)$($U\subset E_l$为一有界闭域)，如果对于$(X,t)\in U\times I$，有

$$LV(X,t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{l}b_i(X,t)\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\leqslant 0,$$

则过程$y(t)=V(X(\tau(t)),\tau(t))$是一个$\mathscr{N}_t$上鞅.

其中τ为(2.1)的解过程$X(t)$关于U的首出时，$\tau(t)=\tau\wedge t$；$\mathscr{N}_t$为(2.1)的解过程$X(t)$的自然σ域。

【证明】 对任意的$s<t$，利用前面引理2.10的作法，并由引理2.3，有

$$E[V(X(\tau(t)),\tau(t))|\mathscr{N}_s]\leqslant V(X(s),s).\ a.s.$$

(i)若$\tau>s$, $a.s.$则$X(\tau(s))=X(s)\in U$，于是有

$$E[y(t)\mid \mathscr{N}_s]=E[V(X(\tau(t)),\tau(t))\mid \mathscr{N}_s]\leqslant V(X(s),s)$$
$$=V(X(\tau(s)),\tau(s))=y(s)\ , \ a.s.$$

(ii) 若 $\tau\leqslant s$, $a.s.$ 则 $\tau(s)=\tau(t)=\tau$, 于是有

$$E[y(t)\mid \mathscr{N}_s]=E[V(X(\tau(t)),\tau(t))\mid \mathscr{N}_s]$$
$$=E[V(X(\tau),\tau)\mid \mathscr{N}_s]=V(X(\tau),\tau)$$
$$=V(X(\tau(s)),\tau(s))=y(s),\ a.s.$$

综上所述，对任意 $s<t$，有 $E[y(t)\mid \mathscr{N}_s]\leqslant y(s)$, $a.s.$ ▌

如果对于所有 $X\in E_l$, $t\geqslant 0$, 有 $LV\leqslant 0$, 并且 $E_{sX}V(X(t),t)$ 存在，则类似地可证明过程 $V(X(t),t)$ 也是一个 $\mathscr{N}_t$ 上鞅。

如果条件 $LV\leqslant 0$ 在 U 中某个集（即使在某一点）上不满足，则上鞅性质一般不成立，然而在某些情形，即使上面的条件不满足，但过程的上鞅性质仍保持。现在我们就来讨论这种情形，为此，我们先引进下面的概念。

定义2.4 设 $\tau_\Gamma=\inf\{t;X(t)\in\Gamma\}$ 为过程 $X(t)$ 关于集 Γ 的**首达时**，称闭集 Γ 为对过程 $X(t)$ 是**不可达**的，如果

$$P\{\tau_\Gamma<\infty\}=0.$$

因为过程 $X(t)$ 的样本轨道连续，故集 Γ 不可达的充要条件是 $P\{\tau_{U_\delta}(\Gamma)\to\infty$, 当 $\delta\to 0$ 时$\}=1$, 其中 $U_\delta(\Gamma)$ 是集 Γ 的 δ 邻域，$\tau_{U_\delta}(\Gamma)$ 为过程 $X(t)$ 关于 $U_\delta(\Gamma)$ 的首出时。

引理2.17 设 $U\subset E_l$ 为一有界区域，$\Gamma\subset U$ 为 (2.1) 解过程 $X(t)$ 的一个不可达集，如果

(i) $V(X,t)\in C_2((U\setminus\Gamma)\times I)$ 且 V 在 $U\times I$ 中有界；

(ii) $LV(X,t)\leqslant 0$, $(X,t)\in(U\setminus\Gamma)\times I$.

则 $V(X(\tau_U(t)),\tau_U(t))$ 是一个上鞅。

【证明】 对任一 $\delta>0$，令 $\tau_{U,\delta}$ 为过程 $X(t)$ 关于集 $U\setminus U_\delta(\Gamma)$ 的首出时，$\tau_{U,\delta}(t)=\tau_{U,\delta}\wedge t$.

由设 Γ 是不可达的，故对任一 t，有

$$\tau_{U\delta}(t) \to \tau_U(t),\ a.s.\ \text{当}\delta \to 0\text{时}。 \tag{2.44}$$

另方面，由引理2.16，有

$$E[V(X(\tau_{U\delta}(t), \tau_{U,\delta}(t)) \mid \mathcal{N}_s] \leqslant V(X(\tau_{U\delta}(s), \tau_{U\delta}(s)), a.s.$$

由设 V 是有界的，并利用 (2.44) 及条件期望的性质，让 $\delta \to 0$，两端取极限就有

$$E[V(X(\tau_U(t)), \tau_U(t)) \mid \mathcal{N}_s] \leqslant V(X(\tau_U(s)), \tau_U(s)), a.s.$$

引理2.18（解过程的矩估计） 设

(i)方程(2.1)的系数满足：

$$b(0,t)=0, \quad \sigma_r(0,t)=0, (r=1,2,\cdots,k)。 \tag{2.45}$$

(ii) Lipschitz 条件 (2.10′) 在 $E=E_l\times I$ 上成立。则对任一 $\beta>0, t\geqslant s\ X\neq 0$, 有

$$E|X^{sX}(t)|^\beta \leqslant |X|^\beta \exp\{k(t-s)\}, \tag{2.46}$$

其中 $k=k(\beta,B)$, B 为 Lipschitz 常数。

【证明】 首先，由条件(i),(ii)，自然有条件(2.10″)在 E 上成立。令 $V(X)=|X|^\beta$，于是对任一 $\delta>0, V\in C_2(U_\delta)$，从而在 U_δ 中利用 Itô 公式于 $Y^{sX}(t)=|X^{sX}(t)|^\beta$ 有

$$Y^{sX}(\tau_\delta(t)) = Y^{sX}(s) + \beta\int_s^{\tau_\delta(t)} |X^{sX}(u)|^{\beta-2}[(b(X^{sX}(u),u),$$

$$X^{sX}(u))\,du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} a_{ii}(X^{sX}(u),u)du + \sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(X^{sX}(u),u),$$

$$X^{sX}(u)dW_r(u)] + \frac{1}{2}\beta(\beta-2)\int_s^{\tau_\delta(t)} |X^{sX}(u)|^{\beta-4}$$

$$\times (A(X^{sX}(u),u)X^{sX}(u),\ X^{sX}(u))du \tag{2.47}$$

其中 τ_δ 为过程 $X^{sX}(t)$ 关于 U_δ 的首出时，$\tau_\delta(t)=\tau_\delta\wedge t$. 显然，对任一 $\beta>0$，$EY^{sX}(\tau_\delta(t))$ 存在（事实上，如 $\beta\leqslant 0$，这由 $Y^{sX}(\tau_\delta(t))=|X^{sX}(\tau_\delta(t))|^\beta$ 的有界性推得，如 $\beta>0$，

这可由§2.2的例2.1推得）。于是对(2.47)式两端取期望并利用(2.45)和(2.10')得

$$EY^{sx}(\tau_\delta(t)) \leqslant |X|^\beta + kE\int_s^{\tau_\delta(t)} Y^{sx}(u)\,du, \qquad (2.48)$$

这里 $k=k(\beta,B,l)$．因对 $u<\tau_\delta(t)$ 有 $\tau_\delta(u)=u$，故由(2.48)有

$$EY^{sx}(\tau_\delta(t)) \leqslant |X|^\beta + kE\int_s^{\tau_\delta(t)} Y^{sx}(\tau_\delta(u))\,du$$

$$\leqslant |X|^\beta + k\int_s^t EY^{sx}(\tau_\delta(u))\,du,$$

由第1章的Gronwall-Bellman不等式，有

$$E|X^{sx}(\tau_\delta(t))|^\beta \leqslant |X|^\beta \exp\{k(t-s)\}. \qquad (2.49)$$

令 $\beta=-1$，由(2.49)有

$$|X|^{-1}\exp\{k(t-s)\} \geqslant E_{sx}|X(\tau_\delta(t))|^{-1} = \int_\Omega \frac{1}{|X(\tau_\delta(t))|}\,dP_{sx}$$

$$\geqslant \int_{(\tau_\delta<t)} \frac{1}{|X(\tau_\delta)|}\,dP_{sx} = \frac{1}{\delta}P_{sx}\{\tau_\delta<t\},$$

亦即 $P_{sx}\{\tau_\delta<t\} \leqslant \frac{\delta}{|X|}e^{k(t-s)}$，从而有

$$P_{sx}\{\tau_\delta<t\} \to 0, \text{当}\delta\to 0\text{时}. \qquad (2.50)$$

于是对于 $t\geqslant s$，$X\neq 0$，由(2.49)有

$$|X|^\beta \exp\{k(t-s)\} \geqslant \lim_{\delta\to 0} E|X^{sx}(\tau_\delta(t))|^\beta$$

$$\geqslant \lim_{\delta\to 0}\int_{(\tau_\delta>t)} |X^{sx}(t)|^\beta dP \text{（由(2.50)）}$$

$$= E|X^{sx}(t)|^\beta.$$

〔注〕（1）由(2.50)可得，在引理的假设下，点 $X=0$ 对于过程 $X^{sx}(t)$ 是不可达的。

（2）如果条件(2.10')，对每个集 $K\times I$ 满足（这里 $K\subset E_l$ 为紧集）并且

$X(t)$是正则的，则 $X=0$ 对于 $X^{sx}(t)$ 仍是不可达的. 直观上，这是显然的，因为一个正则过程的轨道是否能击中 $X=0$，仅依赖于该点邻域中方程系数的性态.

引理2.19 设

(i)方程(2.1)的系数满足(2.45)；

(ii)在关于 X 的每个有界区域中，条件 (2.10′) 成立，且 $X^{SX}(t)$ 是正则的。

则点 $X=0$，对于解过程$X^{SX}(t)$ $(X\neq 0)$是不可达的。

由引理 2.16 与 2.18，我们有

引理2.20 设

(i)$V(X,t)\in C_2^0(U\times\{t>0\})$，并在$U\times\{t>0\}$中有界。

(ii)$LV(X,t)\leqslant 0,(X,t)\in U\times\{t>0\}$， $X\neq 0$。

则$V(X(\tau_U(t)),\tau_U(t))$是一个上鞅，从而有

$$EV(X^{SX}(\tau_U(t)),\tau_U(t))\leqslant V(X,S),X\in U,$$

其中 U 为原点的任一邻域，$C_2^0(U\times\{t>0\})$表示除原点外，在此域中关于X二次连续可微，关于 t 连续可微并且对任一 $\varepsilon>0$，在闭集$\overline{U}\setminus U_\varepsilon(0)$内连续的函数类。

〔注〕 由(2.50)，我们有

$$P_{sx}\{\tau_\delta(t)\to t,\ \text{当}\delta\to 0\text{时}\}=1,$$

因此在(2.47)中，让$\delta\to 0$，易见 Itô 公式在整个方向中可应用于函数 $|X|^\beta$，尽管如果 $\beta<2$，此函数在 $X=0$ 处不满足 Itô 公式的条件. 这一结论对于任意使得

$$0\leqslant V(X,t)\leqslant k|X|^\beta$$

的函数 $V(X,t)\in C_2^0(E)$ 仍然是正确的.

§2.5 随机稳定性

考虑 Itô 方程：

$$
dX(t)=b(X(t),t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t),t)dW_r(t),
$$
$$
X(s)=X(\in E_l),\ a.s. \tag{2.51}
$$

假设(i) b,σ_r 在关于 X 的每有界域中满足条件(2.10′)；

(ii) b,σ_r 满足条件(2.45)，即

$$
b(0,t)\equiv 0,\quad \sigma_r(0,t)\equiv 0,(r=1,2,\cdots,k).
$$

定义2.5 方程(2.51)的平凡解 $X(t)\equiv 0$ 是称为随机稳定的（或按概率稳定的），如果对每一 $\varepsilon>0$，有

$$
\lim_{X\to 0}P\{\sup_{t>s}|X^{sx}(t)|>\varepsilon\}=0.
$$

注意，这一定义较第1章的弱随机稳定性的定义要强。上述定义表明，在时刻 S 从点 X 出发的过程的样本轨道，总保持在任意给定的原点邻域中的概率趋于1，当 $X\to 0$ 时。

定义2.6 函数 $V(X,t)$ 称为在点 $X=0$ 的邻域中（在 Ляпунов 意义下）是**正定的**，如果

(i) $V(0,t)\equiv 0$；

(ii) 在此邻域中有 $V(X,t)>W(X)$（这里 $W(X)>0$，对于 $X\neq 0$）。

下面的随机稳定性定理类似于常微中的Ляпунов定理，对于非退化过程，此定理首先是由Хасьминский在1962年建立的，嗣后，此定理已作了各个方向上的推广。

定理2.21（随机稳定性定理） 设$U\subset E_l$为包含原点的任一区域，假设在$U\times\{t>0\}=U_1$中，存在一个满足下列条件的$V(X,t)$：

(i) $V(X,t)\in C_2^0(U_1)$且在Ляпунов意义下是正定的；

(ii) $LV(X,t)\leqslant 0$，对于$(X,t)\in U_1$且$X\neq 0$。

则(2.51)的平凡解是随机稳定的。

【证明】 设$r>0$，且使得$U_r\cup(\partial U_r)\subset U$，

令$V_r=\inf\limits_{X\in U\setminus U_r}V(X,t)$ （由设$V_r>0$）。由(ii)及引理2.20，有$EV(X^{sx}(\tau_{U_r}(t),\tau_{U_r}(t))\leqslant V(X,s)$，对于$|X|<r$，再利用Чебышев不等式（第1章，引理1.13），有

$$P\{\sup_{s\leqslant u\leqslant t}|X^{sx}(u)|>r\}\leqslant\frac{EV(X^{sx}(\tau_{U_r}(t)),\tau_{U_r}(t))}{V_r}$$

$$\leqslant\frac{V(X,s)}{V_r}.$$

先让$t\to\infty$，有$P\{\sup\limits_{u\geqslant s}|X^{sx}(u)|>r\}\leqslant\frac{V(X,s)}{V_r}$，再由条件(i)知，$V(0,s)=0$且$V(X,s)$关于$X$连续，从而有

$$\lim_{X\to 0}P\{\sup_{u\geqslant s}|X^{sx}(u)|>r\}=0. \quad ▌$$

〔注〕 称（2.51）的平凡解是随机一致稳定的，如果对每$\varepsilon>0$，关

于 $S\geqslant 0$ 一致地有

$$P\{\operatorname*{Sup}_{t>s}|X^{s,x}(t)|>\varepsilon\}\xrightarrow[X\to 0]{}0.$$

由定理2.21的证明，即可推知（2.51）的平凡解是随机一致稳定的。如果存在函数$V(X,t)$，它除满足定理2.21的条件外，还具有无穷小上界，即

$$\lim_{X>0}\operatorname*{Sup}_{t>0}V(X,t)=0.$$

下面来讨论随机稳定性定理的逆定理，亦即对每个随机稳定系统是否存在一个满足定理2.21假设的 Ляпунов 函数的问题。为了简单起见，我们仅限于讨论齐次情形並假设"噪声"除在 $X=0$ 外是处处非退化的。

定理2.22 （关于 Ляпунов 函数的存在定理） 假设

(i) $b(X,t)\equiv b(X)$，$\sigma_r(X,t)\equiv\sigma_r(X)$，$(r=1,2,\cdots,k)$．且相应的时齐方程(2.51)的平凡解是随机稳定的；

(ii) 在 $X=0$ 的某邻域内，条件(2.10′)成立；

(iii)非退化条件

$$\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\lambda_i\lambda_j>m(X)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2 \tag{2.52}$$

成立。其中 $m(X)\in C[U_r,R_+]$，U_r 为 $X=0$ 的一个邻域且 $C[U_r,R_+]$记为从 $U_r\to R_+$（正半轴）的连续函数类。以后类同。

则在 $X=0$ 的邻域 U_r 内，存在一个满足下列条件的正定函数 $V(X)$：

(i) $V(X)\in C_2^0(U_r)$；

(ii) $LV=0$，$X\in U_r$ 且 $X\neq 0$。

【证明】(1) 利用偏微分方程解的随机表现来构造 $V(X)$．

设 $U_r=\{|X|<r\}$ 为 $X=0$ 的一个充分小邻域。记 $u_\delta(X)$ $(0<\delta<r)$ 为在 $U_r\setminus U_\delta$ 中下列边值问题的一个解，$Lu=0$，$u|_{|X|=r}=1, u|_{|X|=\delta}=0$. 令 $\tau_{r,\delta}$ 为过程 $X^X(t)$ 关于 $\{|X|=r\}\cup\{|X|=\delta\}$的首达时，由引理 2.11 推得

$$u_\delta(X)=E_X u(X(\tau_{r,\delta}))=\int_\Omega u(X^X(\tau_{r,\delta}))dp$$

$$=\int_{|X^X(\tau_{r,\delta})|=r} u(X^X(\tau_{r,\delta}))dp$$

$$+\int_{|X^X(\tau_{r,\delta})|=\delta} u(X^X(\tau_{r,\delta}))dp \text{ (由边界条件)}$$

$$=\int_{|X^X(\tau_{r,\delta})|=r} u(X^X(\tau_{r,\delta}))dp$$

$$=P\{|X^X(\tau_{r,\delta})|=r\}.$$

显然，L 调和函数序列：$u_\delta(X)\uparrow$，当$\delta\to0$时，于是 $\lim\limits_{\delta\to0}u_\delta(X)=V(X)$也是 L 调和的. 记 τ_0 为过程轨道关于$X=0$ 的首达时，则由

$$\{\sup_{t>0}|X^X(t)|\geqslant r\}\subset\bigcup_{\delta>0}\{|X^X(\tau_{r,\delta})|=r\}\cup\{\tau_0<\infty\},$$

$$\bigcup_{\delta>0}\{|X^X(\tau_{r,\delta})|=r\}\subset\{\sup_{t>0}|X^X(t)|\geqslant r\}.$$

但由引理 2.19 知，$X=0$ 对于 $X^X(t)$ $(X\neq0)$是不可达的，即$\{\tau_0<\infty\}$为零测集，故有

$$P\{\sup_{t>0}|X^X(t)|\geqslant r\}=\lim_{\delta\to0}P\{|X^X(\tau_{r,\delta})|=r\}=V(X).$$

(2)证明 $V(X)$ 满足定理所要求的条件 (i),(ii),且是正定的。首先由前面知，$V(X)$ $(X\neq0)$是 L 调和的，故满足条件(i)即 $V\in C_2^0(U_r)$。其次，由设 $X\equiv0$ 是随机稳定的，故由定义有

$$\lim_{X\to0}V(X)=\lim_{X\to0}P\{\sup_{t>0}|X^X(t)|\geqslant r\}=0.$$

因V在$X=0$处连续，故$V(0)=0$.最后，由条件(iii)及强极大原理知函数$u_\delta(X)$，对于$|X|>\delta_1>\delta$是正的，而$u_\delta(X)\uparrow V(X)$，当$\delta\to 0$时，故$V(X)$在Ляпунов意义下是正定的，再由$V(X)$的构造法即知$LV=0$，即条件(ii)满足。 ∎

〔注〕（1）Малкин定理〔16〕表明，此定理的结论，对于确定性系统是不成立的．从而推知非退化条件（2.52）不能去掉，亦即（2.51）不能退化为确定性方程．

（2）定理中构造的$V(X)$，在$X=0$处连续但不光滑．一般，一个光滑的Ляпунов函数在$X=0$处，其光滑性可不存在．

例2.8 设$x(t)$为下列方程所定义的一维过程：

$$dx(t)=bx(t)dt+\sigma x(t)dW(t), \tag{2.53}$$

这里b，σ均为常数。易知它的微分生成算子为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+bx\frac{\partial}{\partial x}.$$

若令$V(x)=|x|^{1-2b/\sigma^2}$，则

$$LV=(1-\frac{2b}{\sigma^2})|X|^{1-2b/\sigma^2}(b-\frac{\sigma^2}{2})\leqslant 0,$$

如$b<\frac{\sigma^2}{2}$，故由定理2.21知，其平凡解$x(t)\equiv 0$是随机稳定的，然而，如果$b\geqslant 0$，则此函数$V(x)$在$x=0$处是不可微的。一般利用椭圆方程的极大原理，容易表明，任意使得$V_1(0)=0$，$V_1(\varepsilon)\geqslant\delta$的函数$V_1(x)$在区域：$0<x<\varepsilon$中满足：

$$V_1(x)\geqslant\delta(|X|/|\varepsilon|)^{1-2b/\sigma^2}.$$

因此，对这种一般的$V_1(x)$，当$b>0$时在$X=0$处也是不可微的。故推得当$b>0$时，方程(2.53)不存在一个在原点光滑且不依赖于t的Ляпунов函数$V(x)$。类似地，亦可表明，甚至不存在一个在$x=0$处光滑，依赖于t且有一个无穷小上界的Ляпунов函数。

§2.6 随机渐近稳定性与不稳定性

一、随机渐近稳定性

定义 2.7 (2.51)的平凡解 $X(t)\equiv 0$ 是称为**随机渐近稳定的**，如果它是随机稳定的，並且有

$$\lim_{X\to 0} P\{\lim_{t\to +\infty} X^{sX}(t)=0\}=1. \tag{2.54}$$

定义 2.8 (2.51)的平凡解 $X(t)\equiv 0$ 是称为**大范围随机渐近稳定的**，如果它是随机稳定的，並且对所有 s, X，有

$$P\{\lim_{t\to\infty} X^{sX}(t)=0\}=1. \tag{2.55}$$

为了建立随机渐近稳定性与大范围随机渐近稳定性准则，我们还需要引进过程常返性的概念以及建立关于常返性条件的引理。

定义 2.9 设 $U_1\subset E_l$ 为某个(有界或无界)区域，並令 $U=U_1'$，扩散过程 $X(t)$ 称为 U_1 **常返的**，如果它是正则的，並且对每 $s, X\in U$，有

$$P_{sX}\{\tau_U<\infty\}=1. \tag{2.56}$$

引理 2.23 过程 $X(t)$ 是 U_1 常返的，如果

(1)它是正则的；

(2)在 $U\times I$ 中存在一个非负函数 $V(X,t)\in C_2(U\times I)$；

(3) $LV(X,s)\leqslant -\alpha(s)$. (2.57)

这里 $\alpha(s)\geqslant 0$，且满足

$$\beta(t)=\int_0^t \alpha(s)ds\to\infty,\quad 当\ t\to\infty\ 时. \tag{2.58}$$

此外，在上述条件下，$E_{sX}\beta(\tau_U)$ 存在且满足不等式

$$E_{sX}\beta(\tau_U)\leqslant\beta(s)+V(X,s).\qquad(2.59)$$

【证明】令 $\tau_n=\inf\{t;|X(t)|=n\}$，$\tau_U^{(n)}(t)=\min\{\tau_U,t,\tau_n\}$ 由引理2.3及(2.57)，有

$$\begin{aligned}&E_{sX}V(X(\tau_U^{(n)}(t)),\tau_U^{(n)}(t))-V(X,s)\\&=E_{sX}\int_s^{\tau_U^{(n)}(t)}LV(X(u),u)du\\&\leqslant-E_{sX}\int_s^{\tau_U^{(n)}(t)}\alpha(u)du\\&=\beta(s)-E_{sX}\beta(\tau_U^{(n)}(t)).\end{aligned}$$

再由 V 的非负性及上不等式，有

$$E_{sX}\beta(\tau_U^{(n)}(t))\leqslant\beta(s)+V(X,s).$$

由于过程是正则的，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_U^{(n)}(t)=\tau_U(t)$，$a.s.$ 从而由 Fatou 引理，推得

$$E_{sX}\beta(\tau_U(t))\leqslant\beta(s)+V(X,s).\qquad(2.60)$$

于是有

$$\int_{\{\tau_U\geqslant t\}}\beta(t)dP_{sX}\leqslant E_{sX}\beta(\tau_U(t))\leqslant\beta(s)+V(X,s),$$

亦即

$$P_{sX}\{\tau_U\geqslant t\}\leqslant\frac{\beta(s)+V(X,s)}{\beta(t)}.$$

让 $t\to\infty$，并利用(2.58)，即得 $P_{sX}\{\tau_U<\infty\}=1$，即 $X(t)$ 是 U_1 常返的。让 $t\to\infty$，对(2.60)式再利用 Fatou 引理，即得 $E_{sX}\beta(\tau_U)$ 存在且满足不等式：

$$E_{sX}\beta(\tau_U)\leqslant\beta(s)+V(X,s).\quad\blacksquare$$

引理 2.24 假设过程 $X(t)$ 在一个有限时间内几乎必然地从每有界区域离开，则 $X(t)$ 是 U_1 常返的一个充分条件是在 $U\times I$ 中存在一个非负函数 $V(X,t)\in C_2(U\times I)$，并使

(1) $V_R=\inf\limits_{t>0,|X|\geqslant R}V(X,t)\to\infty$，当 $R\to\infty$ 时．

(2) $LV\leqslant0,\qquad(X,t)\in U\times I$．

【证明】 令 τ_U，τ_R，$\tau_{U,R}$ 分别记为 $X(t)$ 关于 U. U_R，$U\cap U_R$ 的首出时，$\tau_{U,R}(t)=\tau_{UR}\wedge t$. 对任 $s\geqslant 0$. $X\in U$ 由设 $LV\leqslant 0$ 及引理 2.3，有

$$E_{sX}V(X(\tau_{UR}(t)),\tau_{U,R}(t))\leqslant V(X,s).$$

让 $t\to\infty$，对上式利用 Fatou 引理并由过程在有限时间内几乎必然地从每有界区域离开，即 $P_{sX}\{\tau_{UR}<\infty\}=1$，我们有

$$E_{sX}V(X(\tau_{U,R}),\tau_{U,R})\leqslant V(X,s).$$

再由 Чебышев 不等式，有

$$P_{sX}\{\tau_R<\tau_U\}=P_{sX}\{|X(\tau_{UR})|\geqslant R\}\leqslant\frac{E_{sX}V(X(\tau_{UR}),\tau_{UR})}{V_R}$$

$$\leqslant\frac{V(X,s)}{V_R},$$

由设，当 $R\to\infty$ 时，$V_R\to\infty$，从而有

$$P_{sX}\{\tau_R<\tau_U\}\leqslant\frac{V(X,s)}{V_R}\to 0,\text{ 当 } R\to\infty\text{时}.$$

此外，因 $|X(\tau_U)|\neq|X(\tau_R)|$，a.s. 故由过程的连续性，有

$$P_{sX}\{\tau_R=\tau_U\}=0.$$

然而，$\{\tau_U<\infty\}=\{\tau_U<\tau_R\}\cup\{\tau_U>\tau_R\}\cup\{\tau_U=\tau_R\}$，故由上面的讨论推得

$$P_{sX}\{\tau_U<\infty\}\geqslant P_{sX}\{\tau_U<\tau_R\}\to 1,\text{ 当 } R\to\infty\text{ 时}. \quad ■$$

〔注〕Хасьминский 指出：如果扩散过程 $X(t)$ 的位移向量与扩散矩阵，满足

$$0<a_0<a_{ii}(X,s),\ b_i(X,s)<b_0\ (\text{或 } b_i(X,s)>b_0), \qquad (2.61)$$

$$b_i(X,s)>b_0>0\quad(\text{或 } b_i(X,s)<-b_0<0) \qquad (2.62)$$

则过程 $X(t)$ 几乎必然地从每有界区域离开（见第1章文献 Hasminskii[1] 第三章§7 推论 2）.

为了下面讨论方便起见，我们将 $X(t)$ 几乎必然地从每有界区域离开的条件，改为下面的特殊形式，並记为条件 D.

条件D：对于任意充分小的$r>0$和$\varepsilon>0$，从$U_{r,\varepsilon}=\{X: \varepsilon<|X|<r\}$中出发的方程(2.51)的任一解过程，在有限时间内几乎必然地到达该区域的边界，即

$$P_{sX}\{\tau_{r,\varepsilon}<\infty\}=1, X\in U_{r,\varepsilon}, \quad s\geqslant 0.$$

由引理2.23推得，如果在$0<|X|<r$中，存在一个函数$W(X,t)\in C_2^0(U_r\times I)$，使得对任一$\varepsilon$，$0<\varepsilon<r$，有

$$W(X,t)\geqslant 0,\ LW(X,t)<-C_\varepsilon<0,\quad |X|>\varepsilon \qquad (2.63)$$

则条件D满足。

在下面的定理中，假设$U\subset E_l$为原点的某一邻域。

定理2.25（随机渐近稳定性定理）　假设

(i)在$U\times I$中存在一个具有无穷小上界的正定函数，$V(X,t)\in C_2^0(U\times I)$，並满足$LV\leqslant 0$.

(ii)条件D成立。

则方程(2.51)的平凡解$X(t)\equiv 0$是随机渐近稳定的。

【证明】　首先由条件(i)及引理2.20知，过程$V(X^{sX}(\tau_U(t)),\tau_U(t))$是一个上鞅，再由上鞅收敛定理（定理2.14），有

$$\lim_{t\to\infty} V(X^{sX}(\tau_U(t)),\tau_U(t))=\xi,\ a.s. \qquad (2.64)$$

现令

$$B_X=\{\omega:\ 使得X^{sX}(t,\omega)的\ \tau_U(\omega)=\infty\}$$

因由(i)知V满足定理2.21的假设，故解$X(t)\equiv 0$是随机稳定的，从而有

$$\lim_{X\to 0} P(B_X)=\lim_{X\to 0} P\{X^{sX}(t)\in U,对于所有\ t\geqslant s\}=1\ . \qquad (2.65)$$

再由条件D，有$\inf\limits_{t>s}|X^{sX}(t)|=0$, $a.s.$于B_X，鉴于引理2.19知，$X=0$是不可达的，故更有

$$\liminf_{t\to\infty}|X^{sX}(t)|=0,\quad a.s.\ 于\ B_X.$$

由设 V 具有无穷小上界，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|X|<\delta(\varepsilon)$ 时，有 $V(X,t)<\varepsilon$. 于是对给定的 $\delta(\varepsilon)>0$，因

$$\liminf_{t\to\infty}|X^{sX}(t)|=0,$$

故存在 $t_n\uparrow\infty$ 及 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，有 $|X^{sX}(t_n)|<\delta(\varepsilon)$，从而由上所述，有 $V(X^{sX}(t_n),t_n)<\varepsilon$，因 V 非负，故有

$$\liminf_{t\to\infty}V(X^{sX}(t),t)=0.$$

但由(2.64)，

$$\lim_{t\to\infty}V(X^{sX}(\tau_U(t),\tau_U(t))=\lim_{t\to\infty}V(X^{sX}(t),t)$$

存在 $a.s.$ 于 B_X，从而有

$$\lim_{t\to\infty}V(X^{sX}(t),t)=\liminf_{t\to\infty}V(X^{sX}(t),t)=0,\quad a.s.$$

于 B_X，再因 $V(X,t)$ 是正定的，故有

$$\lim_{t\to\infty}|X^{sX}(t)|=0,\quad a.s.$$

于 B_X，由于

$$B_X\setminus N\ (\text{零测集})\subset\{\omega:\lim_{t\to\infty}|X^{sX}(t)|=0\},$$

故有

$$\lim_{X\to 0}P\{\lim_{t\to\infty}|X^{sX}(t)|=0\}\geqslant\lim_{X\to 0}P\{B_X\}\quad(\text{由}2.65)$$

$$=1.\qquad\blacksquare$$

正如前述，条件 D 可由存在一个满足不等式(2.63)的函数 $W(X,t)$ 来替代，因此如果 LV 是负定的，则 $V(X,t)$ 本身则满足不等式(2.63)。于是我们有下面的类似于确定性系统渐近稳定性定理的推广。

推论 2.26 若在 $U\times\{t>0\}$ 中存在一个具有无穷小上界的正定函数 $V(X,t)\in C_2^0(U\times I)$，其使得在此区域中 LV 是

负定的。则(2.51)的平凡解 $X(t)\equiv 0$ 是随机渐近稳定的。

另外，如果扩散矩阵 $A(X,t)$满足非退化条件 (2.52)，则条件 D 成立。事实上，恰当地选择 k 和 n，则函数 $W=k-|X|^n$ 满足条件(2.63)。于是我们有下面的推论。

推论 2.27 设 $b(X,t)\equiv b(X)$，$\sigma_r(X,t)\equiv\sigma_r(X)$，且非退化条件(2.52)满足。于是，若方程(2.51)的平凡解是随机稳定的，则它一定也是随机渐近稳定的。

二、随机不稳定性定理

下面仍令 $U_r=\{|X|<r\}\subset E_l$。

定理2.28 假设存在函数 $V(X,t)\in C_2^0(U_r\times T)$，使得

$$(\text{i})\ LV\leqslant 0,\quad X\in U_r, X\neq 0; \tag{2.66}$$

$$(\text{ii})\ \lim_{X\to 0}\inf_{t>0} V(X,t)=\infty. \tag{2.67}$$

並且条件 D 成立，则方程(2.51)的平凡解 $X(t)\equiv 0$ 是随机不稳定的，进而更有

$$P\{\sup_{t>0}|X^{sX}(t)|<r\}=0,\ \ 对于所有\ s>0, X\in U_r.$$

【证明】 记 $\tau_{r,\varepsilon}$ 为过程$X^{sX}(t)$关于集$\{|X|=r\}\cup\{|X|=\varepsilon\}$ 的首达时，由(2.66)及引理2.3，对任一正数 $\varepsilon<r$，在 $U_r\setminus U_\varepsilon$ 中有

$$EV(X^{sX}(\tau_{r,\varepsilon}(t)),\tau_{r,\varepsilon}(t))\leqslant V(X,s).$$

让 $t\to\infty$，由条件 D 推得 $EV(X^{sX}(\tau_{r,\varepsilon}),\tau_{r,\varepsilon})\leqslant V(X,s)$。从而有

$$\inf_{|X|<\varepsilon,t>0} V(X,t)P\{\sup_{0<t<\tau^*}|X^{sX}(t)|<\varepsilon\}$$

$$\leqslant EV(X^{sX}(\tau_{r\varepsilon}),\tau_{r\varepsilon})\chi_{|X^{sX}(\tau_{r\varepsilon})|=\varepsilon}(\omega)$$

$$\leqslant EV(X^{sX}(\tau_{\Gamma,s}),\tau_{\Gamma,s})\leqslant V(X,s).$$

这里 τ^{ε} 记为过程 $X^{sX}(t)$ 关于集 $|X|=\varepsilon$ 的首达时，从而由上不等式，我们有

$$P\{\sup_{0<t<\tau^{\varepsilon}}|X^{sX}(t)|<r\}\leqslant\frac{V(X,s)}{\inf\limits_{|X|<\varepsilon,t>0}V(X,t)}$$

因由引理 2.19 知，$X=0$ 是不可达的，故当 $\varepsilon\to0$ 时，有 $\tau^{\varepsilon}\to\infty$ $a.s.$ 于是让 $\varepsilon\to0$ 并利用(2.67)即得

$$P\{\sup_{t>0}|X^{sX}(t)|<r\}=0 \text{ 对于所有 } s>0, X\in U_r. \quad ∎$$

〔注〕类似于前面的讨论，我们有下面关于不稳定性的充分条件：

（1）方程（2.51）的解 $X(t)\equiv0$ 是不稳定的，如果在 $U_r\times I$ 中，条件（2.66），（2.67）和（2.52）成立.

（2）方程（2.51）的解 $X(t)\equiv0$ 是不稳定的，如果条件（2.67）成立，进而 $\sup\limits_{\varepsilon<|X|<r}LV<0$，对于任意 $\varepsilon>0$.

三、大范围随机渐近稳定性定理

定理 2.29 方程(2.51)的平凡解是大范围随机渐近稳定的，如果

(i)它是随机一致稳定的；

(ii)过程 $X^{sX}(t)$，对于任意 $\varepsilon>0$，关于区域 $|X|<\varepsilon$ 是常返的。

【证明】 因为解 $X(t)\equiv0$ 是随机一致稳定的，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'(\varepsilon)>0$，使得

$$\sup_{s>0,|Y|<\delta'}P\{\sup_{t>s}|X^{s,Y}(t)|>\varepsilon\}<\varepsilon.$$

对任给的 $s\geqslant0, X(\neq0)$，选取一个 $\delta>0$，使得 $|X|>\delta$，且 $\delta<\delta'$，令 τ_{δ} 为过程 $X^{sX}(t)$ 关于集 $|X|\leqslant\delta$ 的首达时，由设过程是常返的，故几乎必然有 $\tau_{\delta}<\infty$，利用过程的强马氏性，

我们有

$$P\left(\varlimsup_{t\to\infty}\{|X^{sX}(t)|>\varepsilon\}\right)$$

$$=\int_{U=s}^{\infty}\int_{|Y|=\delta}P\{\tau_\delta\in du, X^{sX}(\tau_\delta)\in dy\}$$

$$\times P\left(\limsup_{t\to\infty}\{|X^{uY}(t)|>\varepsilon\}\right)$$

$$\leqslant\int_{U=s}^{\infty}\int_{|Y|=\delta}P\{\tau_\delta\in du, X^{sX}(\tau_\delta)\in dy\}$$

$$\times P\left\{\sup_{t>u}|X^{uY}(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant\varepsilon.$$

亦即

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}|X^{sX}(t)|=0\right\}=1. \quad \blacksquare$$

由此定理，易得关于Ляпунов函数的各种大范围随机渐近稳定性的充分条件。下面的定理就是常微中的Барьашин和Красовский定理[17]，对于随机微分方程的推广。

定理 2.30 方程(2.51)的平凡解是大范围随机渐近稳定的，如果存在一个满足下列条件的Ляпунов函数$V(X,t)$.

(1)$V(X,t)$是一个具有无穷小上界的正定函数且

$$V(X,t)\in C_2^0(E);$$

(2)LV 是负定的；

(3) $\inf_{t>0}V(X,t)\to\infty$，当 $|X|\to\infty$ 时。

【证明】 首先，由定理2.21的注知，在定理的假设下，解 $X(t)\equiv0$ 是随机一致稳定的。其次，由引理2.24及其后面的注以及引理2.23知，此解过程关于集 $|X|<\varepsilon$ 是常返的，对任一$\varepsilon>0$.

定理 2.31 下面的条件，对于(2.51)的解 $X(t)\equiv0$ 的大范围随机渐近稳定性是充分的。

(i)过程 $X(t)$ 是正则的；

(ii)存在一个非负函数$V_1(X,t)\in C_2^0(E)$，使得LV_1是负定的；

(iii)存在一个正定函数$V_2(X,t)\in C_2^0(E)$，它具有无穷小上界並且使得$LV_2\leqslant 0$.

证明可由定理2.29的证明及引理2.23和2.24以及上面有关定理推得。

注意，由定理2.4，我们可以下面的条件(i′)，来替代上面定理中的条件(i).

(i′)存在一个非负函数$V_3(X,t)\in C_2^0(E)$，使得对于某个正常数k，有$LV_3<kV_3$，並且有

$$\lim_{R\to\infty}\inf_{|X|>R} V_3=\infty.$$

类似地，(ii)可以下面的(ii′)来替代。

(ii′)对于任意R和$\varepsilon<R$，在$U_R\setminus U_\varepsilon$中非退化条件(2.52)成立。

条件(ii)甚至还以可更弱的条件：$a_{ii}(X,t)>a_{R,\varepsilon}>0$，对于某个$i$来替代。

§2.7 随机噪声与系统的稳定性

一、问题的提出

我们先来考察下面的例子。

例2.9 考虑由下面的Itô方程描述的一维过程$x(t)$：

$$dx(t)=b(x(t),t)dt+\sigma(x(t),t)dw(t). \qquad (2.68)$$

它的微分算子为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \qquad (2.69)$$

假设展开式：

$$b(x,t)=b(t)x+o(|x|);\quad \sigma(x,t)=\sigma(t)x+o(|x|) \tag{2.70}$$

在 $x=0$ 的某邻域内成立。

根据条件(2.10)，函数 $b(t)$ 和 $\sigma(t)$ 均为有界并且关系式(2.70)关于 $t>0$ 一致地成立。假设

$$\int_s^t\left[b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}+\varepsilon\right]ds<k \tag{2.71}$$

对于某个 $\varepsilon>0$，$k>0$ 和所有 $t>0$ 成立，则对充分小的 $r>0$，辅助函数

$$V_1(x,t)=|x|^r\exp\{-r\int_0^t(b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}+\varepsilon)ds\}$$

$$=|x|^rV(t)$$

满足定理 2.21 的所有假设。

事实上，由(2.71)推得 $V_1(x,t)$ 是正定的，进而，由(2.69)和(2.70)有

$$LV_1(x,t)=r|x|^rV(t)[-\varepsilon+\frac{1}{2}r\sigma^2(t)]+o(|x|^r).$$

因此，如果 $r<\varepsilon/\sup\limits_{t>0}\sigma^2(t)$，则函数 $LV_1(x,t)$ 在 $x=0$ 的一个充分小的邻域内是负定的。从而，如果条件(2.71)成立，则(2.68)的解 $x(t)\equiv0$ 是随机稳定的。

现在让我们假设

$$\int_0^t\left[b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}-\varepsilon\right]ds>-k \tag{2.72}$$

对于某个 $\varepsilon>0$，$k>0$ 和所有 $t>0$ 成立，则辅助函数：

$$V_2(x,t)=-\ln|x|+\int_0^t\left[b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}-\varepsilon\right]ds$$

显然满足条件(2.67)，进

$$LV_2(x,t) \leqslant -\varepsilon + o(1). \quad (x\to 0)$$

因此，由定理2.28的注(2)推得，如果条件(2.72)成立，则方程(2.68)的平凡解是不稳定的。

由上面讨论，易见(2.68)的线性近似系统：

$$dx(t) = b(t)x(t)dt + \sigma(t)x(t)dw(t)$$

的稳定性（或不稳定性）意味着完全系统(2.68)的稳定性（或不稳定性）。然而在一般情形，这一结论不一定成立。我们将在本书的第三篇中，详细地讨论随机系统首次近似式的稳定与不稳定的条件问题。

在上述例子中，我们看到如果条件(2.71)满足，特别，如果此系统中的函数 $b(s)$ 是正的，但只要差：$b(s) - \dfrac{\sigma^2(s)}{2}$ 小于某负常数，则系统(2.68)是随机稳定的。由此我们可以得到一个有趣的结论：**确定性系统：$\dfrac{dx}{dt} = b(x(t),t)$ 是不稳定的（甚至它的线性近似系统也是不稳定的），但它可通过引进一个噪声“强度”$\sigma^2(x,t)$足够大的附加随机扰动来“稳定化”**.

又例如，在§2.5的例子中我们已见到常系数线性系统：

$$dx(t) = bx(t)dt + \sigma x(t)dw(t)$$

当$b<\dfrac{\sigma^2}{2}$时是随机稳定的。现如改写此方程为

$$\dot{x}(t) = (b + \sigma\dot{w}(t))x(t). \tag{2.73}$$

则可得到这样的结论：如果在一个不稳定的一阶确定性系统的系数上，叠加上一个强度足够高的白噪声，则此系统就被“稳定化”了。这一结论是与物理的直觉相矛盾的，显然两

者都是正确的。下面我们来解释为什么会出现这一矛盾的结果。

二、Itô 方程与 Стратонович 方程之间的关系

现在定义方程(2.73)的解 $x(t)$ 为方程：

$$\dot{x}_n = (b + \sigma \dot{W}_n(t))x_n$$

的解序列 $x_n(t)$ 的极限。这里 $\dot{W}_n(t)$ 为一 Gauss 过程序列，它的相关函数收敛到一个 δ 函数。

可以证明（特别可由 Hasminskii[18]中的结果推得）在此情形（並且也在更一般的条件下），上面的极限过程不能导致一个 Itô 方程，它导致一个类似于 Itô 方程的 Стратонович 方程：

$$dx(t) = bx(t)dt + \sigma x(t)d^*W(t).$$

其中 $d^*W(t)$ 为 Stratonovic[19]意义下的随机微分。

下面我们就来讨论 Itô 方程与 Стратонович 方程之间的关系。

Itô 方程(2.51)的解，可以随机差分方程：

$$X(t_n+h) - X(t_n) = b(X(t_n), t_n)h + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(X(t_n), t_n) \times [W_r(t_n+h) - W_r(t_n)]$$

的解，当 $h \to 0$ 时的均方极限来构造。

另方面，类似的 Стратонович 方程：

$$dX(t) = b(X(t), t)dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(X(t), t)d^*W_r(t) \qquad (2.74)$$

的解是定义为随机差分方程：

$$X(t_n+h)-X(t_n)=b(X(t_n),t_n)h+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r\left(\frac{X(t_n)+X(t_n+h)}{2},\right.$$
$$\left.t_n\right)[W_r(t_n+h)-W_r(t_n)] \qquad (2.74')$$

的解，当 $h\to0$ 时的均方极限。

Стратонович 在[19]中证明了，如果函数 $\sigma_r(X,t)$ 关于 X 连续可微，则上面当 $h\to0$ 时的隐式差分格式等价于下面的显式格式：

$$\begin{aligned}X(t_n+h)-X(t_n)=[&b(X(t_n),t_n)\\&+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r(X(t_n),t_n)}{\partial X}\sigma_r(X(t_n),t_n)]h\\&+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t_n),t_n)[W_r(t_n+h)\\&-W_r(t_n)].\end{aligned} \qquad (2.74'')$$

因此，Stratonovič 方程(2.74)等价于 Itô 方程：

$$\begin{aligned}dX(t)=[b(X(t),t)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r}{\partial X}\sigma_r(X(t),t)]dt\\+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t),t)dW_r(t).\end{aligned} \qquad (2.75)$$

于是，由方程(2.74)定义的过程的微分算子是

$$\begin{aligned}L=&\frac{\partial}{\partial t}+[b(X,t)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r}{\partial X}\sigma_r(X,t),\frac{\partial}{\partial X}]\\&+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}[\sigma_r(X,t),\frac{\partial}{\partial X}]^2\\=&\frac{\partial}{\partial t}+[b(X,t),\frac{\partial}{\partial X}]\\&+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}[\sigma_r(X,t),\frac{\partial}{\partial X}[\sigma_r(X,t),\frac{\partial}{\partial X}]].\end{aligned} \qquad (2.76)$$

差分格式(2.74′)与(2.74″)等价的理由，可扼要地作如下的解释。因为向量 $\sigma_r(X,t)$ 关于 X 均为连续可微，从而推得 $h\to 0$ 时，有

$$\sigma_r\left(\frac{X(t_n)+X(t_n+h)}{2},\ t_n\right)=\sigma_r(X(t_n),t_n)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\sigma_r(X(t_n),t_n)}{\partial X}+o(1)\right](X(t_n+h)-X(t_n)).$$

将此式代入(2.74′)並利用等式：

$$\left[I-\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r}{\partial X}\Delta W_r(t)\right]^{-1}=I+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r}{\partial X}\Delta W_r(t)$$

$$+o(\Delta W_r(t)),\text{当 }\Delta W_r(t)\to 0\text{ 时}.$$

这里 I 为单位矩阵，並且 $\Delta W_r(t)=W_r(t+h)-W_r(t)$. 易得

$$X(t_n+h)-X(t_n)=b(X(t_n),t_n)h+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t_n),t_n)\Delta W_r(t_n)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r}{\partial X}(X(t_n),t_n)\sigma_j(X(t_n),t_n)$$

$$\times\Delta W_r(t_n)\Delta W_j(t_n)+o(h)\qquad(2.77)$$

可进一步表明，在上面和数中对应于 $j\neq r$ 的项，当 $h\to 0$ 时均为某种意义下比h较高阶的无穷小量.这是因为当 $r\neq j$ 时，$W_r(t)$ 与 $W_j(t)$相互独立之故。此外，当 $h\to 0$ 时，(2.77)中的$(\Delta W_r(t_n))^2$ 可以它的期望 h 来替代。由(2.77) 和这些关系式，我们不难理解当 $h\to 0$ 时(2.74′)与(2.74″)的等价性。

从上面的讨论可知，在处理物理问题中，一个具有小时间相关的实际过程，白噪声是其理想的代表，因此描述此物理系统的方程，通常考虑为一个(2.74)型的Стратонович随机微分方程，然而 Стратонович 方程(2.74)等价于Itô方程(2.75)，故研究 Itô 方程即可.

通过 Itô 方程与 Стратонович 方程之间的关系，我们就可解决上段中所出现的矛盾。

因为由(2.76)易见，在上面所考虑的一维情形中，方程(2.73)（其视为一个 Стратонович 方程）的伴随算子为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+bx\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}x\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}+\left[b+\frac{\sigma^2}{2}\right]x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

于是结合例 2.9，我们得到由方程

$$dx=bxdt+\sigma xd^*W(t)$$

定义的过程 $x(t)$，对于 $b<0$ 是稳定的，对于 $b>0$ 是不稳定的，这与物理直觉是一致的。

因此，一个不稳定的一维确定性系统：$\dot{x}=bx$（$b>0$，是一常数）是不能通过"可物理实现"的参数扰动来稳定化的．这一事实，首先是由 Leibowitz[20]发现的，而且他还猜测在多维情形，也有类似的结果，然而在第 3 章的 §3.6 中，我们将举例表明在多维情形並非如此。

三、随机噪声对系统稳定性的影响

下面再以例子的形式来进一步讨论物理可行扰动（即 Стратонович 类扰动）与 Itô 类扰动对系统稳定性的影响。

例 2.10 假设确定性系统

$$\frac{dX}{dt}=b(X,t),\tag{2.78}$$

在第 1 章定理 1.21 注(1)的意义下是指数稳定的，並且假设函数 $b(X,t)$ 有关于空间变数的一阶和二阶的有界导数，则稍许改变 Красовский（见第 1 章文献[11]）文章中定理 11.1

的证明，易见，对于系统(2.78)存在一个函数 $W(X,t)$，使得

$$k_1|X|^2<W(X,t)<k_2|X|^2,$$

$$\frac{d^0W}{dt}=\frac{\partial W}{\partial t}+\sum_{i=1}^{l}b_i(X,t)\frac{\partial W}{\partial x_i}<-k_3|X|^2,$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial X}\right|<k_4|X|,\qquad \left|\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial x_j}\right|<k_5.$$

利用此 Ляпунов 函数研究“受扰”系统：

$$dX(t)=b(X(t),t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t),t)dW_r(t)$$
$$+F(X(t),t)dt \tag{2.79}$$

的稳定性，我们得到

$$LW=\frac{d^0W}{dt}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial x_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{l}F_i(X,t)\frac{\partial W}{\partial x_i}$$

$$\leqslant -k_3|X|^2+k_5|A(X,t)|+k_4|X||F(X,t)|.$$

因此，由定理 2.25 推得方程(2.79)的解 $X(t)\equiv 0$ 是随机渐近稳定的，如果系统(2.78)在原点的某个邻域内是指数稳定的，并且在此邻域内对于充分小的 ε 有

$$\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(X,t)|+|F(X,t)|<\varepsilon|X|. \tag{2.80}$$

如果系统(2.78)是大范围指数稳定的，并且条件(2.80)处处成立，则由定理 2.29 推得系统(2.79)是大范围随机渐近稳定的。从而该例表明，如果对于 $\varepsilon<\varepsilon_0$，条件(2.80)满足，那末只要确定性系统(2.78)有充分强的稳定性，则其相应的随机系统(2.79)就有一定的随机稳定性，对于 ε_0 我们也不难作出它的一个估计。特别对于系统参数的“物理可实现”扰

动，如白噪声，上面的结论仍然成立。

例 2.11 在例 2.9 的讨论中，已看到一维系统

$$\dot{x} = bx, \quad (b<0).$$

当它的参数受任意强度的白噪声扰动时，它仍然是稳定的。这结论对于 Itô 类扰动和对于物理可行扰动，仍保持正确。现在我们可证明，如果空间的维数大于 2 或在物理可行扰动的情形中，维数大于1，则充分强的同向噪声将破坏这一稳定性。作为本节的结束，我们仅表明，如果σ是一个充分大的常数，则对于系统：

$$dx_i(t) = b_i(X,t)dt + \sigma \sum_{j=1}^{l} x_j dW_{(i-1)l+j}(t), \quad (i=1,2,\cdots,l);$$

$$d\tilde{x}_i(t) = b_i(\tilde{X},t)dt + \sigma \sum_{j=1}^{l} \tilde{x}_j d^* W_{(i-1)l+j}(t), \quad (i=1,2,\cdots,l).$$

(这里 $W_1(t),\cdots,W_{2l}(t),\cdots,W_{l^2}(t)$ 均为独立的Wiener 过程)存在一个函数 $V(X)$ 满足定理2.28的假设，只要函数 $b_i(X,t)$ 满足条件(2.10′)和(2.44)。易见过程 $X(t)$ 和 $\tilde{X}(t)$ 的微分算子为

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} b_i(X,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\sigma^2}{2}|X|^2 \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

$$\tilde{L} = L + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{l} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

考虑辅助函数

$$V(X) = -\ln|X|^2 = -\ln(x_1^2 + \cdots + x_l^2)$$

并假设常数 σ 充分大，由(2.10)和(2.45)我们看到

$$LV = \frac{-2(X, b(X,t))}{|X|^2} - \sigma^2(l-2) < 0, \quad 对于\ l>2.$$

$$\tilde{L}V = \frac{-2(X, b(X,t))}{|X|^2} - \sigma^2(l-1) < 0, \quad 对于\ l>1.$$

应用定理 2.28 及其后面的注(2)，即可得到上面的结论．

现在我们来证明，在此例中所考虑的 Itô 类扰动不破坏渐近稳定系统：

$$dx_i = b_i x_i dt,\quad (b_i<0,\ i=1,2)$$

的稳定性，对于任意 σ 值．

事实上，在此情形中

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+b_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\sigma^2}{2}|X|^2\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

考虑辅助函数 $V(X)=|X|^{\alpha}=(x_1^2+x_2^2)^{\alpha/2}$，对于充分小的 $\alpha>0$．我们即得不等式

$$LV(X)=\alpha|X|^{\alpha-2}\left[b_1x_1^2+b_2x_2^2+\frac{\alpha\sigma^2}{2}|X|^2\right]<0.$$

因此，由定理 2.30 推得，相应的 Itô 系统是大范围随机渐近稳定的。

例 2.12 考虑系统

$$dx_1=x_2dt+\sigma(x_1,x_2)dW_1(t),$$
$$dx_2=-x_1dt+\sigma(x_1,x_2)dW_2(t).$$

显然在没有随机扰动(即 $\sigma=0$)时，此系统的平衡位置是稳定的但不渐近稳定。此系统的微分算子为

$$L=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\sigma^2(X)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

易见函数 $W(X)=-\ln(x_1^2+x_2^2)$ 满足条件 (2.66)，(2.67)，因此，若 $\sigma(X)\neq0$，对于 $X\neq0$，则此系统是不稳定的。此例表明一个稳定但不渐近稳定的确定性系统，当受白噪声驱动时(此白噪声强度，当 $X\to0$ 时，迅速地趋于 0)可变为不稳定的。

§2.8 随机微分方程的解对初值的可微性

在 §2.5 证明随机稳定性定理的逆定理中，我们是将 Ляпунов 函数 V 构造为有关解过程的某个泛函的期望，即

$$V(X)=E_X\chi_{\{\sup_{t\geq 0}|X(t)|\geq r\}}(\omega),$$

然而 V 的光滑性，即此期望对初值 X 的光滑性是仅在非退化情形，利用偏微分方程理论才得到了保证。Gihman[21] 和 Blagovescenskii[22] 已用另一种方法证明了这种光滑性。他们首先证明随机微分方程的解 $X^{sX}(t)$ 关于初值 s,X 的光滑性，然后作为一个推论得到了相应期望的光滑性，这种方法可应用于具有任意退化程度的扩散过程。为此，对于系数 b 和 σ_r 的光滑性要有足够的要求。

在本节中我们首先介绍 Гихман 的随机微分方程解关于初值的可微性定理，然后，我们来建立一些辅助关系式，这些关系式在下节中我们将用来证明关于某种随机稳定系统的 Ляпунов 函数的存在性。

*一、Гихман 定理

定理 2.32 设方程

$$dX^{sX}(t)=b(X^{sX}(t),t)dt+\sigma(X^{sX}(t),t)dW(t) \qquad (2.81)$$

的系数在 E 中关于 t,X 连续且关于 X 有二阶连续有界导数，则(2.81)的解 $X^{sX}(t)$ 关于 X 是二次均方连续可微的，即

$$\frac{\partial}{\partial x_i}X^{sX}(t),\ \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}X^{sX}(t)$$

关于 X 是均方连续的。这些导数是通过关于 X，形式地微

分对应于(2.81)的积分方程：

$$X^{sX}(t)=X+\int_s^t b(X^{sX}(u),u)du+\int_s^t \sigma(X^{sX}(u),u)dW(u)$$

而得到的方程组所确定的。

〔注〕如果$\phi(x_1, \cdots, x_l; t)$是依赖于参数$x_1, x_2, \cdots, x_l, t$的随机函数，它关于$x_i$的均方偏导数是定义为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_l, t)$$

其使得

$$E\left\{\frac{1}{\Delta x_i}[\phi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i+\Delta x_i, \cdots, x_l; t)-\phi(x_1, \cdots, x_l; t)]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_l; t)\right\}^2\to 0,\ \text{当}\Delta x_i\to 0\text{时}.$$

下面我们仅给出此定理证明的一些思想方法和步骤，详细证明，读者可参考 Gihman 和 Skorohod[2]，而且为了符号简单起见，我们仅限于E_1的情形。

(1)令

$$y_{x,\Delta x}(t)=\frac{1}{\Delta x}[x^{s,x+\Delta x}(t)-x^{s,x}(t)]$$

易见$y_{x,\Delta x}(t)$是方程：

$$y_{x,\Delta x}(t)=1+\int_s^t A(x,\Delta x,u)y_{x,\Delta x}(u)du+\int_s^t B(x,\Delta x,u)$$

$$\times y_{x,\Delta x}(u)dW(u) \tag{2.82}$$

的一个解。其中

$$A(x,\Delta x,t)=\frac{b(x^{s,x+\Delta x}(t),t)-b(x^{s,x}(t),t)}{x^{s,x+\Delta x}(t)-x^{s,x}(t)},$$

$$B(x,\Delta x,t)=\frac{\sigma(x^{s,x+\Delta x}(t),t)-\sigma(x^{s,x}(t),t)}{x^{s,x+\Delta x}(t)-x^{s,x}(t)}.$$

由定理的假设：b'_x, σ'_x均有界，故有

$$|A|\leqslant\bar{k}, a.s;\quad |B|\leqslant\bar{k},\quad a.s.$$

其中$\bar{k}$为正常数．

(2)对任意$n\geqslant 1$，利用Itô公式于过程：

$$Z(x,\Delta x,t)=[y_{x,\Delta x}(t)]^{2n}.$$

并由(2.82)，我们得到

$$Z(x,\Delta x,t)=1+n\int_s^t Z(x,\Delta x,u)[2A(x,\Delta x,u)$$
$$+(2n-1)B^2(x,\Delta x,u)]du$$
$$+2n\int_s^t Z(x,\Delta x,u)B(x,\Delta x,u)dW(u).$$

如同引理2.18的证明，计算上式两端的期望并利用Gron-Wall-Bellman引理，我们得到

$$E[y_{x,\Delta x}(t)]^{2n}\leqslant e^{k(t-s)},\tag{2.83}$$

这里k仅依赖于σ'_x，b'_x的上确界和数n。

(3)由(2.83)推得，当$\Delta x\longrightarrow 0$时，有

$$x^{s,x+\Delta x}(t)\xrightarrow{\ P\ }x^{s,x}(t).$$

因此，有

$$A(x,\Delta x,u)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{P}b'_x(x^{s,x}(u),u);$$

$$B(x,\Delta x,u)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{P}\sigma'_x(x^{s,x}(u),u).$$

再由A,B,b'_x和σ'_x均为有界的，故利用Lebesgue有界收敛定理推得，对任一n，有

$$E(A-b'_x)^n\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0,\quad E(B-\sigma'_x)^n\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0.$$

(4)再利用均方极限的性质，并由(2.82)即得当$\Delta x\to 0$时，$y_{x,\Delta x}(t)$均方收敛到方程：

$$\zeta_x(t)=1+\int_s^t b'_x(x^{sx}(u),u)\zeta_x(u)du$$
$$+\int_s^t \sigma'_x(x^{sx}(u),u)\zeta_x(u)dW(u) \tag{2.84}$$

的一个解。由定义 $\zeta_x(t)=\frac{\partial}{\partial x}x^{s,x}(t)$。

(5)由(2.82)，(2.83)和(2.84)对任一$n\geqslant 1$，易见

$$\left.\begin{aligned}&E[\zeta_x(t)]^{2n}\leqslant e^{k(t-s)},\\&E[y_{x+\Delta x}(t)-\zeta_t(t)]^{2n}\longrightarrow 0,\text{ 当 }\Delta x\to 0\text{ 时。}\end{aligned}\right\} \tag{2.85}$$

用类似的方法可证明二阶导数的存在性和连续性。

二、一些引理

引理 2.33 设方程(2.81)的系数，满足下列条件：

(i) $\sigma(0,t)\equiv 0,\quad b(0,t)\equiv 0$。 (2.86)

(ii)它们关于 t，X 连续且关于 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 有连续有界的一阶和二阶偏导数。

则对任意的 β，函数 $u(X,s)=E|X^{s,X}(t)|^\beta$，除去 $X=0$ 外，关于 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 是二次连续可微的，並且还有

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial u(X,s)}{\partial X}\right|\leqslant k_1|X|^{\beta-1}e^{k_2(t-s)}\\&\left|\frac{\partial^2 u(X,s)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqslant k_1|X|^{\beta-2}e^{k_2(t-s)}\end{aligned}\right\} \tag{2.87}$$

其中 $k_1>0,k_2>0$。

【证明】 仅考虑 $l=1$ 的情形。对于多维情形的证明留给读者作为练习。

(1)由形式微分，有

$$u'_x(x,s)=\beta E\{|x^{s,x}(t)|^{\beta-2}x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\} \tag{2.88}$$

下证(2.88)右端期望的存在性。利用不等式：

$a^{\alpha}b^{\beta}\leqslant\alpha a+\beta b$（其中 $a\geqslant0,b\geqslant0,0<\alpha<1,\alpha+\beta=1$），有

$$|x^{sx}(t)|^{\beta-1}\left|\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(|x^{sx}(t)|^{2\beta-2}+\left|\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right|^{2}\right)$$

$$<|x^{sx}(t)|^{2\beta-2}+\left|\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right|^{2}.$$

上式第一项由引理2.18，第二项由(2.85)即推得(2.88)右端的期望存在。

(2)证明当 $\beta=2$ 时，$u(x,s)$关于 x 的可微性。

首先由(2.88)考虑

$$\frac{u(x+\Delta x,s)-u(x,s)}{\Delta x}-2E\left(x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right)$$

$$\leqslant E\left|\frac{(x^{s,x+\Delta x}(t))^{2}-(x^{s,x}(t))^{2}}{\Delta x}-2x^{s,x}(t)\frac{\partial x^{s,x}(t)}{\partial x}\right|$$

（利用 Schwartz 不等式）

$$\leqslant\left(E\left(\frac{(x^{s,x+\Delta x}(t))^{2}-(x^{s,x}(t))^{2}}{\Delta x}-2x^{s,x}(t)\frac{\partial x^{s,x}(t)}{\partial x}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{E\{2x^{s,x}(t)((y_{x,\Delta x}(t)-\frac{\partial x^{s,x}(t)}{\partial x})+[y_{x,\Delta x}(t)]^{2}\Delta x\}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

（利用 Cr 不等式）

$$\leqslant\left\{2E[4(x^{s,x}(t))^{2}(y_{x,\Delta x}(t)-\frac{\partial x^{s,x}(t)}{\partial x})^{2}]\right.$$

$$\left.+2E[y_{x,\Delta x}(t)]^{4}(\Delta x)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

（对上式第一项再利用 Schwartiz 不等式）

$$\leqslant\left\{32\left(E(x^{sx}(t))^{4}E(y_{x,\Delta x}(t)-\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x})^{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+2E[y_{x,\Delta x}(t)]^4(\Delta x)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

因此由(2.83)，(2.85)推得$\frac{\partial}{\partial x}E|x^{sx}(t)|^2$存在，并且

$$\frac{\partial}{\partial x}E|x^{sx}(t)|^2=2E\left(x^{s,x}(t)\frac{\partial x^{s,x}(t)}{\partial x}\right).$$

(3)由(2)还可推得下列结果：

令 $\quad y=[x^{sx}(t)]^2, \quad y+\Delta y=[x^{s,x+\Delta x}(t)]^2 \qquad (2.89)$

则(i) $\sup\limits_{s<t\leqslant s+T}E\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2<k$，这里$T>0$.

(ii) $E\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-2x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right)^2\longrightarrow 0$，当$\Delta x\to 0$时。

(2.90)

(iii)$E(\Delta y)^4\longrightarrow 0$，当 $\Delta x\to 0$ 时. $\qquad$ (2.91)

上述结果利用(2.83)，(2.85)和引理2.18，即可推得。

(4)证明 $\beta\neq 2$ 的情形。此时，因

$$\left|\frac{u(x+\Delta x,s)-u(x,s)}{\Delta x}-\beta E\left(|x^{sx}(t)|^{\beta-2}x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right)\right|$$

$$=\left|E\left\{\left(\frac{(y+\Delta y)^{\beta/2}-y^{\beta/2}}{\Delta y}-\frac{\beta}{2}y^{\beta/2-1}\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\beta}{2}y^{\beta/2-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-2x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right)\right\}\right|$$

(利用 Schwartz 不等式)

$$\leqslant\left\{E\left(\frac{(y+\Delta y)^{\beta/2}-y^{\beta/2}}{\Delta y}-\frac{\beta}{2}y^{\beta/2-1}\right)^2E\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\beta}{2}\left\{Ey^{\beta-2}E\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-2x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.92)$$

由引理2.18和(2.90)知(2.92)式右端第二项，当 $\Delta x\to 0$ 时，

趋于0．由(2.90)知$E\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$有界，故此，只需证明

$$J=\frac{(y+\Delta y)^{\beta/2}-y^{\beta/2}}{\Delta y}-\frac{\beta}{2}y^{\beta/2-1},$$

当$\Delta x\to 0$时，均方收敛于0即可。由不等式:

$$\frac{|u^{\beta/2}-1-(\beta/2)u^{\beta/2-1}(u-1)|}{(u-1)^2}<k(u^{\beta/2-2}+1)$$

其中，$k>0, u>0$． 并令$u=(y+\Delta y)/y$，因为$y>0$，$y+\Delta y>0$，推得

$$|J|<k|\Delta y|[(y+\Delta y)^{\beta/2-2}+y^{\beta/2-2}],$$

从而有

$$EJ^2\leqslant k_1^2(E|\Delta y|^4)^{1/2}\{[E(y+\Delta y)^{2\beta-8}]^{1/2}+(Ey^{2\beta-8})^{1/2}\}.$$

由此不等式及(2.91)和引理2.18，推得

$$\lim_{\Delta x\to 0}EJ^2=0.$$

从而证得$\frac{\partial}{\partial x}E|x^{sx}(t)|^\beta$存在，且

$$\frac{\partial}{\partial x}E|x^{sx}(t)|^\beta=\beta E\left(|x^{sx}(t)|^{\beta-2}x^{sx}(t)\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right).$$

(5)利用(2.85)和(2.46)並从(2.88)，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x}E|x^{sx}(t)|^\beta\right|&=|u'_x(x,s)|=\left|\beta E\left(|x^{sx}(t)|^{\beta-2}x^{sx}(t)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\times\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right)\right|\\&\leqslant|\beta|E\left(|x^{sx}(t)|^{\beta-1}\left|\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right|\right)\\&\leqslant|\beta|(E|x^{sx}(t)|^{2\beta-2})^{1/2}\times\end{aligned}$$

$$\times E\left|\frac{\partial x^{sx}(t)}{\partial x}\right|^2\Big)^{1/2} \leqslant k_1|x|^{\beta-1}e^{k_1(t-s)}.$$

可类似地证明 u''_{xx} 的存在性和连续性以及估计式(2.87)。▌

引理 2.34 在引理2.33的假设下，函数 $u(X,s) = E|X^{sX}(t)|^\beta$，关于 s 可微且对于 $X\neq0$，有

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial s}+\sum_{i=1}^{l}b_i(X,s)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X,s)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial u_j}=0.$$

【证明】 此引理的证明与 Гихман 和 Скороход[2] 的第八章定理5.1的证明基本相同，因此下面我们仅限于给出那些不同之处。如同前面，我们仅考虑 $l=1$ 的情形。

通过 Itô 公式展开差分：$u(x^{sx}(s+\Delta s),s+\Delta s)-u(x,s+\Delta s)$ 並利用恒等式：$Eu(x^{sx}(s+\Delta s),s+\Delta s)=u(x,s)$，我们得到

$$u(x,s)-u(x,s+\Delta s)=E\int_s^{s+\Delta s}\Big[\frac{\partial}{\partial x}u(x^{sx}(t),s+\Delta s)$$
$$\times b(^{sx}(t),t)+\frac{1}{2}\sigma^2(x^{sx}(t),t)$$
$$\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x^{sx}(t),s+\Delta s)\Big]dt, \qquad (2.93)$$

然后利用关于 u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 如同前面(2.87)的估计式，可得估计：

$$|u_x^{(i)}(x,s+\Delta s)-u_x^{(i)}(x,s)|\leqslant k\Delta s|x|^{\beta-i}, \quad (i=0,1,2).$$

利用这些估计式和(2.87)，並由(2.93)通过让 $\Delta s\to0$，我们容易得到引理的结论。▌

推论2.35 函数 $V(X,s)=\int_s^{s+T}E|X^{sX}(t)|^\beta dt$ 属于类

$C^0_2(E)$，并且

$$LV(X,s)=E|X^{sX}(s+T)|^\beta-|X|^\beta.$$

【证明】 首先由引理2.33及2.34，显然有$V\in C^0_2(E)$，下面令$u_t(X,s)=E|X^{sX}(t)|^\beta$，于是有

$$LV(X,s)=L\left[\int_s^{s+T}u_t(X,s)dt\right]=u_{S+T}(X,s)-u_S(X,s)$$

$$+\int_s^{s+T}Lu_t(X,s)dt \quad (\text{由引理}2.34)$$

$$=E|X^{sX}(s+T)|^\beta-E|X^{sX}(s)|^\beta$$

$$=E|X^{sX}(s+T)|^\beta-|X|^\beta. \qquad ▮$$

§2.9 指数p稳定性与q不稳定性$(p,q>0)$

一、指数p稳定性

定义 2.10 系统(2.51)的平凡解是称为

(1)p **稳定的**，如果 $\sup\limits_{|X|<\delta,t\geq s}E|X^{sX}(t)|^p\to0$，当$\delta\to0$时。

(2)**渐近 p稳定的**，如果它是p稳定的，并且有

$$\lim_{t\to\infty}E|X^{sX}(t)|^p=0.$$

(3)**指数 p 稳定的**，如果对于某个正常数A和a，有

$$E|X^{sX}(t)|^p\leqslant A|X|^p\exp\{-a(t-s)\}. \tag{2.94}$$

经常考虑的p稳定性是对于$p=1$（均值稳定性），$p=2$（均方稳定性）.

下面是两个关于指数p稳定性的充分与必要条件的定理，它们可视为确定性系统相应定理（见第1章文献Krasovskii[11]）的推广。此两定理均为Хасьминский等[10]的结果。

定理 2.36 （充分条件） 系统(2.51)的平凡解，对于

$t\geqslant 0$ 是指数 p 稳定的，如果存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t)\in C^0_2(E)$：

(i) $k_1|X|^p\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^p$; $\quad$ (2.95)

(ii) $LV(X,t)\leqslant -k_3|X|^p$. $\quad$ (2.96)

k_1,k_2,k_3 均为正常数。

【证明】 因为 $V(X,t)$ 满足定理 2.4 的条件，故解过程 $X^{sX}(t)$ 是正则的，並且由该定理推得，对于所有 $t>s$, $EV(X^{sX}(t),t)$ 存在。利用 Itô 公式並取期望得

$$EV(X^{sX}(t),t)-V(X,s)=\int_s^t ELV(X^{sX}(u),u)du,$$

两端对 t 微分，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}EV(X^{sX}(t),t)&=ELV(X^{sX}(t),t)\quad(\text{由}(2.96))\\&\leqslant -k_3E|X^{sX}(t)|^p\quad(\text{由}(2.95))\\&\leqslant -\frac{k_3}{k_2}EV(X^{sX}(t),t).\end{aligned}$$

利用引理 1.6 推得

$$EV(X^{sX}(t),t)\leqslant V(X,s)\exp\left\{-\frac{k_3}{k_2}(t-s)\right\},$$

再由(2.95)有

$$\begin{aligned}E|X^{sX}(t)|^p&\leqslant\frac{1}{k_1}EV(X^{sX}(t),t)\\&\leqslant\frac{1}{k_1}V(X,s)\exp\left\{-\frac{k_3}{k_2}(t-s)\right\}\\&\leqslant\frac{k_2}{k_1}|X|^p\exp\left\{-\frac{k_3}{k_2}(t-s)\right\}.\end{aligned}$$ ▌

定理 2.37(必要条件) 如果(2.51)的平凡解是指数 p

稳定的，并且系数 b 和 σ_r 关于 X 有直到二阶的连续有界导数，则存在一个函数 $V(X,t)\in C^0{}_2(E)$，满足

(i) $k_1|X|^p \leqslant V(X,t) \leqslant k_2|X|^p$; (2.97)

(ii) $LV(X,t) \leqslant -k_3|X|^p$; (2.98)

(iii) $\left|\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\right| < k_4|X|^{p-1}$, $\left|\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right| < k_4|X|^{p-2}$,

(2.99)

$k_i > 0$, $i=1,2,3,4$.

【证明】 可以证明，对于适当选择的常数 $T>0$，函数

$$V(X,t)=\int_t^{t+T} E|X^{tX}(u)|^p du \qquad (2.100)$$

即为所求。

首先由引理 2.34 的推论知 $V(X,t)\in C^0{}_2(E)$，其次由于平凡解是指数 p 稳定的，故有

$$V(X,t) \leqslant \int_t^{t+T} A|X|^p \exp\{-\alpha(u-t)\} du$$
$$= \frac{A}{\alpha}|X|^p(1-e^{-\alpha T}) = k_1|X|^p,$$

因为系数 b 和 σ_r 关于 x_i 有有界的偏导数，而且 $\sigma_r(0,t)=0$，$b(0,t)=0$，于是有

$$|a_{ij}(X,t)| \leqslant k_5|X|^2, \quad |b_i(X,t)| \leqslant k_5|X|,$$

$$L(|X|^p)=\sum b_i(X,t)p|X|^{p-2}x_i+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} a_{ij}(X,t)$$
$$\times p(p-2)|X|^{p-4}x_i x_j$$
$$+\frac{1}{2}\sum a_{ii}(X,t)p|X|^{p-4}[(p-2)x_i^2+|X|^2].$$

从而有

$$|L(|X|^p)|\leqslant k_6|X|^p. \tag{2.101}$$

利用 Itô公式于$|X|^p$，有

$$\begin{aligned}E|X^{tX}(t+T)|^p-|X|^p&=\int_t^{t+T}EL(|X^{tX}(u)|^p)du \quad (由(2.101))\\&\geqslant -k_6\int_t^{t+T}E|X^{tX}(u)|^p du=-k_6V(X,t),\end{aligned}$$

因平凡解是指数p稳定的，故又可选取一个T，使得

$$E|X^{tX}(t+T)|^p\leqslant A|X|^p\exp\{-\alpha T\}\leqslant\frac{1}{2}|X|^p. \tag{2.102}$$

从而有$V(X,t)\geqslant\dfrac{1}{2k_6}|X|^p$.至此条件(2.97)满足。

再由引理2.34的推论知

$$\begin{aligned}LV(X,s)&=E|X^{sX}(s+T)|^p-|X|^p \quad (由(2.102))\\&\leqslant-\frac{1}{2}|X|^p.\end{aligned}$$

这就证明了条件(2.98)成立.

最后，利用(2.87)即得可推得估计式:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial V(X,t)}{\partial x_i}\right|&=\int_t^{t+T}\frac{\partial}{\partial x_i}E|X^{tX}(u)|^p du\\&\leqslant\int_t^{t+T}k_1|X|^{p-1}\exp\{k_2(u-t)\}du=k_4|X|^{p-1}.\end{aligned}$$

(2.99)的第二部分可类似地证明。 ▌

下面的引理在研究随机系统的稳定化中是有用的。

引理2.38 假设系数$b(X,t)$和$\sigma_r(X,t)$满足引理2.34的条件，此外

$$\int_{s}^{\infty} E|X^{sX}(t)|^p dt < \infty. \tag{2.103}$$

则

$$\lim_{t\to\infty} E|X^{sX}(t)|^p = 0. \tag{2.104}$$

【证明】 由§2.4中的注(1)知，$X=0$对于(2.51)的解过程$X^{sX}(t)$是不可达的，于是我们可利用Itô公式于函数$|X|^p$，並利用估计式(2.101)（它可由引理的条件推得），易见

$$\begin{aligned}|E|X^{sX}(t+h)|^p - E|X^{sX}(t)|^p| &= \left|\int_t^{t+h} LE|X^{sX}(u)|^p du\right| \\ &\leqslant \int_t^{t+h} |LE|X^{sX}(u)|^p| du \\ &\leqslant k\int_t^{t+h} E|X^{sX}(u)|^p du,\end{aligned}$$

对于某个$k>0$.

因此

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} E|X^{sX}(t)|^p\right| \leqslant kE|X^{sX}(t)|^p, \tag{2.105}$$

由(2.103)，(2.105)，即可推得 $\lim\limits_{t\to\infty} E|X^{sX}(t)|^p = 0$.

二、q不稳定性

首先引进q不稳定性的概念.

定义 2.11 系统(2.51)的平凡解$X(t)\equiv 0$是称为

(1) q **不稳定的**，如果 $\sup\limits_{|X|<\delta, t\geqslant s} E|X^{sX}(t)|^{-q}\to 0$，当$\delta\to 0$时.

(2) **渐近q不稳定的**，如果当$t\to\infty$时，有

$$E|X^{sX}(t)|^{-q} \longrightarrow 0.$$

(3) **指数 q 不稳定的**，如果对于某个正常数 A 和 α，有

$$E|X^{sX}(t)|^{-q}<A|X|^{-q}\exp\{-\alpha(t-s)\}.$$

显然，对于某个 $q>0$，渐近 q 不稳定性意味着随机不稳定性。事实上，由 Чебышев 不等式，有

$$P\{|X^{sX}(t)|<R\}<R^qE|X^{sX}(t)|^{-q}, \text{ 对任意 } R>0.$$

为了避免由过程 $X^{sX}(t)$ 可能的不正则性所带来的困难，直至本节末我们都假设方程 (2.51) 的系数 b 和 σ_r 关于空间变数有有界的导数。

下面关于 q 不稳定性的充分条件与必要条件的两个定理的证明，可完全重复前面关于 p 稳定性的相应定理证明，故我们仅叙而不证。

定理 2.39(充分条件) 系统(2.51)的解 $X(t)\equiv 0$ 是指数 q 不稳定的，对于 $t\geqslant 0$，如果存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t)\in C_2^0(E)$：

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ k_1|X|^{-q}\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^{-q},\\&\text{(ii)}\ LV(X,t)\leqslant -k_3|X|^{-q}.\end{aligned}\right\}\qquad(2.106)$$

定理 2.40(必要条件) 如果(2.51)的系数 b 和 σ_r 关于 X 有直到二阶的连续有界导数，并且(2.51)的解 $X(t)\equiv 0$ 是指数 q 不稳定的，则存在一个满足条件(2.106)以及下列条件的函数 $V(X,t)\in C_2^0(E)$：

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leqslant k_4|X|^{-q-1},\quad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right|<k_4|X|^{-q-2}.$$

〔注〕(1) 由定理 2.37 和定理 2.30 推得系统(2.51)的平凡解是大范围随机渐近稳定的，如果对于某个 $p>0$，它是指数 p 稳定的，並且(2.51)的系数 $b(X,t)$ 和 $\sigma_r(X,t)$ 关于 X 有直到二阶的连续有界导数。

(2) 设函数 $V(X,t)\in C_2^0(E)$ 为正定的，並使得 $V(X,t)<k|X|^p$，进而假设 $LV(X,t)\geqslant 0$，则系统(2.51)的平凡解是非渐近 p 稳定的。

事实上，由引理 2.20 及 §2.4 末的注(2)，利用 Itô 公式于 $V(X^{sX}(t),t)$ 然后取期望，则有

$$kE|X^{sX}(t)|^p \geq EV(X^{sX}(t),t) \geq V(X,s).$$

§2.10 几乎必然指数稳定性

对于一个实际的随机系统而言，最理想的稳定性当然是几乎必然稳定性，因为此时几乎所有的样本轨道都是稳定的，因此这种稳定系统与确定性稳定系统相差无几了。Kozin[25]曾证明了一个充分条件是平凡解是均方指数稳定的，Хасьминский 利用与他完全不同的方法，证明了这一条件，并得到了较 Kozin 更为一般的结果。现在我们就来介绍 Хасьминский 的结果。

定义 2.12 系统 (2.51) 的平凡解是称为

(1) **几乎必然指数稳定的**，如果对任一 $X \in E_l$，$s \geq 0$，存在一常数 $\alpha > 0$ 及一个几乎必然有限的随机变量 $K(X, s)$，使得

$$|X^{sX}(t)| \leq K(X,s)\exp[-\alpha t], \quad t \geq s, \quad a.s.$$

(2) **几乎必然指数不稳定的**，如果对任一 $X(\neq 0) \in E_l$，$s \geq 0$，存在一常数 $r > 0$ 及一个几乎必然有限的随机变量 $K(X,s)$，使得

$$|X^{sX}(t)| \geq K(X,s)\exp[rt], \quad t \geq s, \quad a.s.$$

定理 2.41(几乎必然指数稳定性定理) 如果存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t) \in C_2^0(E)$：

(i) $k_1|X|^p \leq V(X,t) \leq k_2|X|^p$， (2.102)

(ii) $LV(X,t) \leq -k_3|X|^p$。 (2.103)

则系统 (2.51) 的平凡解是几乎必然指数稳定的。

【证明】 令 $W(X,t)=V(X,t)\exp\left\{\frac{k_3}{k_2}t\right\}$，于是，对于 $X\neq0$，有

$$LW=\frac{k_3}{k_2}\exp\left\{\frac{k_3}{k_2}t\right\}V+\exp\left\{\frac{k_3}{k_2}t\right\}LV \quad (\text{由}(2.107),(2.108))$$

$$\leqslant k_3\exp\left\{\frac{k_3}{k_2}t\right\}|X|^p-k_3|X|^p\exp\left\{\frac{k_3}{k_2}t\right\}=0.$$

故由引理2.20知，过程 $W(X^{sX}(t),t)$ 是一个正上鞅，再由定理2.14（上鞅收敛定理）推得，对于所有 s,X，

$$\lim_{t\to\infty}W(X^{sX}(t),t),\ a.s.$$

存在且有限，因此

$$\sup_t W(X^{sX}(t),t)=A_{sX}(\omega)<\infty,\ a.s.$$

由 $W(X,t)$ 的定义，有 $V(X^{sX}(t),t)\leqslant A_{sX}(\omega)e^{-\frac{k_3}{k_2}t}$，$a.s.$ 从而由(2.107)有

$$|X^{sX}(t)|^p\leqslant\frac{1}{k_1}A_{sX}(\omega)e^{-\frac{k_3}{k_2}t},$$

亦即

$$|X^{sX}(\omega)|\leqslant K(X,s)\exp[-at],\ a.s.$$

其中

$$K(X,s)=\frac{1}{k_1}A^{sX}(\omega),a=\frac{k_3}{k_2}. \quad ∎$$

以完全同样的方法，可证明下面的

定理2.42（几乎必然指数不稳定性定理） 如果存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t)\in C_2^0(E)$：

$$\begin{aligned}&(\text{i})\ k_1|X|^{-q}\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^{-q};\\&(\text{ii})\ LV(X,t)\leqslant-k_3|X|^{-q}.\end{aligned}\qquad(2.109)$$

则系统(2.51)的平凡解几乎必然指数不稳定的。

参 考 文 献

1 Dynkin, E.B. Markov processes . Frizmatgiz , Moscow,(1963) English transl. Academic Press , New York . Springer-Verlag , Berlin (1965) MR.33#1886 #1887 .

2 Gihman , I.I.and Skorohod, A.V. Introduction to the theory of random processes , Nauka , Moscow , (1965) English transl. Saunder philadelphia , Pa.(1969) MR.33#6689,40#923.

3 王梓坤，（见第一章文献［3］）

4 Stratonovič, R.L. Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control . Izdat.Moskov. Univ. Moscow , (1966); English transl., American Elsevier , New York , (1967), MR.35#5391.

5 Širjaev, A.N. On stochastic equations in the theory of conditional markov processes , Teor. Verojatnost. i primenen. 11 (1966) , 200-206 = Theor.Probability Appl. 11 (1966) , 179-184 .

6 Feller, W.K. Diffusion processes in one dimension . Transl Amer. Math. Soc. 77 (1954) ,1-31 . MR16#150 .

7 Ventcel, A.D. Semigroups of operators that correspond to a generalized differential operator of second order . Dokl. Akad. Nauk. USSR. 111 (1956) 269-272 (Russian) MR.19#1060 .

8 Ventcel, A.D. On lateral conditions for multidimensional diffusion processes, Teor. Verojatnost. i primenen. 4 (1959) 172-185 = Theor.Probability Appl. 4 (1959) . 164-177. MR.21#5246 .

9 Ueno, T. The diffusion satisfying wentzell's boundary condition and markov process on the boundary.I,II, Proc . Japan Acad. 36 (1960) ,533-538 ; 625-629 . MR.26#1926 .

10 Nevelson, M.B. and Hasminskii, R.Z. Stability of stochastic systems . Problemy Peredači Informacii 2 (1966) VYP. 3 ,76-91 = Problems of Information Transmission 2 (1966) no.3 , 61-74. MR.34#7233 .

11 Hasminskii, R.Z. On the stability of the trajectory of markov processes. Prikl. Mat.Meh. 26 (1962) 1025–1032 = J.Appl.Math.Mech. 26 (1962) 1554–1565 . MR.28#5470

12 Gihman, I.I. Stability of solutions of stochastic differential equations . Limit.Theorems.Statist.Inference. Izdat. "Fan" , Tashkent , (1966), pp.14–45 : English transl., Selected Transl. Statist. and Probability , vol.12 , Amer. Math. Soc. ,Providence , R.I.(1973), pp.125–154. MR.40#944.

13 Kushner.H.J. On the stability of stochastic dynamical systems , Proc. Nat.Acad.Sci. U.S.A. 53 (1964), 8–12. MR. 31#1138 .

14 Kushner,H.J. Converse theorems for stochastic liapunov functions , SIAM.J.Control 5 (1967) , 228–233 , MR.35#4048

15 Friedman,A. Stochastic differential equations and applications . vol.I. Academic Press , New York (1975) .

16 Malkin,I.G. Das Existenzproblem von Liapounoffschen Funktionen , IZV. Kazan . Fiz-Mat.Obšč. 5 (1931), 63–84 .

17 Barbašin,E.A. and Krasovskii,N.N. On stability of motion in the large . Dokl. Akad. Nauk . USSR. 86 (1952) 453–456 (Russian) MR.14#646 .

18 Hasminskii,R.Z. A limit theorem for the solution of differential equations with random right-hand side. Teor . Verojatnost. i Primenen. 11 (1966) 444–462 = Theor. Probability Appl. 11 (1966) 390–406 .MR.34#3637 .

19 Stratonovič,R.L. A new form of representing stochastic integrals and equations , Vestnik Moskov. Univ. ser.I.Mat. Meh. 1964 , no.1 , 3–12 (Russian) MR.28#3476 .

20 Leibowitz,M.A. Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters , J.Mathematical Phys.4 (1963) 852–858 , MR.27#903 .

21 Gihman,I.I. On the theory of differential equations for stochastic processes I . Ukrain.Mat.Ž. 2(1950) no.3,37–63 , English transl. Amer.Math.Soc. Transl. (2).1. (1955) 111–137. MR.14#61;17#502 .

22 Blagoveščenskii,Ju.N. and Freidlin,M.I. Certain properties of diffusion processes depending on a parameter . Dokl. Akad.Nau. USSR. 138 (1961) 508–511 =

Soviet Math.Dokl. 2 (1961) 633-636 . MR25#2632 .

23 Kozin,F. On almost sure asymptotic sample properties of diffusion processes defined by stochastic differential equations . J.Math. Kyoto Univ. 4 (1964/65) 515-528 . MR.31#5239 .

24 Kac,I.Ja. and Krasovskii, N.N. On stability of systems with random parameters , Prikl.Mat. Meh. 24 (1960) 809-823 = J. Appl.Math.Mech. 24 (1960) 1225-1240.

3

线性Itô随机微分方程的稳定性

可以说，任何一个物理系统都是非线性的。我们说某个实际的物理系统是线性的，这意味着，它可以充分精确地用一个线性系统来近似地代表，“充分精确”的意思是实际系统与理想的线性系统的差别，可小到无关紧要的程度。

一、线性Itô系统模型

本章研究受扰于Gauss白噪声$\dot{\eta}_i^j(t)$的线性齐次系统：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{l}(b_i^j(t)+\dot{\eta}_i^j(t))x_j(t),\ i=1,2,\cdots,l \tag{*}$$

其中，$\dot{\eta}_i^j(t)$ 是一个具有零均值和协方差阵为

$$E[\dot{\eta}_i^j(s)\dot{\eta}_n^m(t)]=K_{ij}^{nm}(t)\delta(t-s)$$

的Gauss白噪声。这里$\delta(t)$为δ函数；$i,j,m,n=1,2,\cdots,l$因为由白噪声理论，相依的白噪声过程$\dot{\eta}_i^j(t)$至多可以l^2个相互独立的白噪声过程线性表出，所以我们可将(*)式作为一个线性Itô系统来处理，即化为

$$dX(t)=B(t)X(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t)X(t)dW_r(t). \tag{3.1}$$

这里$\sigma_r(t)=(\sigma_{ir}^j(t))$为$l\times l$矩阵，$l^2\geqslant k$，并且

$$E[\sum_{r=1}^{k}\sigma_{ir}^{j}(s)W_r(s),\sum_{r=1}^{k}\sigma_{n,r}^{m}(t)W_r(t)]=K_{i,j}^{mn}(t)\delta(t-s).$$

根据第2章的 Lipschitz 条件(2.10′)的假设，$\|B(t)\|$，$\|\sigma_r(t)\|$在任一有限区间上均为时间的有界函数。

由第2章§2.7 的讨论，模型(3.1)中的 $dW_r(t)$ 应为 Стратонович 意义下的随机微分 $d^*W_r(t)$，但由第 2 章§2.7的讨论，我们也知道具有 Стратонович 随机微分 $d^*W_r(t)$ 的线性系统是等价于一个线性 Itô系统.两个系统有相同的$\sigma_r(t)$，但新老位移系数之间的关系为

$$\widetilde{B}(t)=B(t)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^2(t).$$

故此，我们仍采用 Itô 系统(3.1)的形式来替代(*)式。

二、线性 Itô 系统(3.1)解的结构

(1)如果$X^{(1)}(t),\cdots,X^{(l)}(t)$为系统(3.1)的解，则对任意常数$k_1,\cdots,k_l$，函数

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{l}k_iX^{(i)}(t) \tag{3.2}$$

也是系统(3.1)的解.

(2)如果$X^{(i)}(t)$是使得矩阵$(x_j^{(i)}(t_0))$的行列式不为零的解，则具有初始条件$X(t_0)=X_0$的系统(3.1)的解，对于适当的常数k_i，可表为(3.2)的和的形式（解$X^{(1)}(t),\cdots,X^{(l)}(t)$称为系统(3.1)的基本解组）。

以上两性质是显然的。另外，由上面的性质立即可得如下推论。

推论3.1 一个随机渐近稳定的线性 Itô 系统，一定也是大范围随机渐近稳定的。

证明留给读者作为练习。

§3.1 一维线性系统

本节考虑一维线性 Itô 系统

$$dx(t)=b(t)x(t)dt+\sigma(t)x(t)dW(t). \tag{3.3}$$

类似于确定性情形，我们有

命题3.1 (3.3)的解，可通过求积得到。

事实上，可直接验证

$$x(t)=x_0\exp\left\{\int_0^t\left[b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}\right]ds+\int_0^t\sigma(s)dW(s)\right\} \tag{3.4}$$

为满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的方程(3.3)的解过程。

首先，满足初始条件 $x(0)=x_0$ 是显然的。

其次，我们来验证其满足方程(3.3)。

令

$$y(t)=\int_0^t\sigma(s)dW(s),$$

则

$$x(t)=x(y(t),t)=x_0\exp\int_0^t\left[b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}\right]ds$$

$$\times\exp y(t),$$

并且 $dy(t)=\sigma(t)dw(t)$，故由 Itô 公式，有

$$dx(t)=\left[\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right]dt+\sigma(t)\frac{\partial x}{\partial y}dW(t)$$

$$=\left[x(t)b(t)-\frac{\sigma^2(t)}{2}x(t)\right]dt+\frac{1}{2}\sigma^2(t)x(t)dt$$

$$+\sigma(t)x(t)dW(t).$$

$$=b(t)x(t)+\sigma(t)x(t)dW(t)$$

解的表示(3.4)，使得我们有可能直接从解的表示式来

寻求方程(3.3)平凡解的稳定性条件。为此，我们有

命题3.2 令

$$\eta(t)=\int_0^t\left[b(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}\right]ds+\int_0^t\sigma(s)dW(s), \qquad (3.5)$$

则(3.3)的平凡解是

(1) 几乎必然渐近稳定的$\Longleftrightarrow P\{\eta(t)\to-\infty$, 当$t\to\infty$时$\}=1$。

(2) 几乎必然稳定的$\Longleftrightarrow \limsup_{t\to\infty}\eta(t)<\infty$, a.s.

(3) 几乎必然不稳定的$\Longleftrightarrow P\{\limsup_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}>0$.

此命题的证明是显而易见的。

由上命题易知，要研究一维线性 Itô 系统(3.3)的稳定性，必须对过程$\eta(t)$的增长性态进行研究。显然过程$\eta(t)$是一个具有Gauss独立增量的过程，当$t\to\infty$时，对它的增长的研究，通过下面的引理可化为对 Wiener 过程增长的研究。

引理3.2 设$\int_0^t\sigma(s)dW(s)$为一个关于 Wiener 过程的 Itô 随机积分，则存在另一个 Wiener过程$\widetilde{W}(t)$，使得

$$\int_{t_0}^t\sigma(s)dW(s)=\widetilde{W}\left[\int_{t_0}^t\sigma^2(s)ds\right], \quad a.s. \qquad (3.6)$$

对于所有$t\geqslant0$。

【证明】 (1) 由于$\widetilde{W}$为变上限积分的函数，因此，为确定起见，令$t(\tau)=\inf\left\{t: \int_{t_0}^t\sigma^2(s)ds=\tau\right\}$，並研究过程$\widetilde{W}(\tau)=\int_0^{t(\tau)}\sigma(s)dW(s)$的某些性质：

(i) 由随机积分定义，易见$\widetilde{W}(\tau)$是一个具有Gauss独立增量的过程。

(ii) 由随机积分性质，容易验证：

$$E\widetilde{W}(\tau)=0, \quad E[\widetilde{W}(\tau)]^2=\tau.$$

从而$\widetilde{W}(\tau)$是一个 Wiener 过程。

(2) 令 $\hat{t}(t)=\inf\left\{u: \int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds=\int_{t_0}^{u}\sigma^2(s)ds\right\}$

则对任一t，我们有

$$\int_{t_0}^{t}\sigma(s)dW(s)=\int_{t_0}^{\hat{t}(t)}\sigma(s)dW(s), \quad a.s.$$

事实上，由 $\hat{t}(t)$ 的定义，对所有的n，存在u_n，使得

$$\int_{t_0}^{u_n}\sigma^2(s)ds<\int_{t_0}^{\hat{t}(t)}\sigma^2(s)ds+\frac{1}{n^2} \quad (\text{由 } \hat{t} \text{ 的定义})$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds+\frac{1}{n^2}, \tag{$*$}$$

对所有的$\varepsilon>0$，令

$$A_n=\left\{\omega: \left|\int_{t}^{u_n}\sigma(s)dW(s)\right|>\varepsilon\right\},$$

于是

$$P\{A_n\}=P\left\{\left|\int_{t}^{u_n}\sigma(s)dW(s)\right|>\varepsilon\right\} \quad (\text{由Чебышев不等式})$$

$$\leqslant\frac{E\left[\left|\int_{t}^{u_n}\sigma(s)dW(s)\right|^2\right]}{\varepsilon^2} \quad (\text{由随机积分性质})$$

$$=\frac{E\left[\int_{t}^{u_n}\sigma^2(s)ds\right]}{\varepsilon^2} \quad (\text{由 } (*))$$

$$<\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

故由 Borel-Cantelli 引理有

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}A_n\right\}=P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{t}^{u_n}\sigma(s)dW(s)\right|>\varepsilon\right\}=0$$

等价于

$$1=P\left\{\left|\int_{t}^{\hat{t}}\sigma(s)dW(s)\right|=0\right\}$$

$$=P\left\{\int_{t_0}^{t}\sigma(s)dW(s)=\int_{t_0}^{\hat{t}}\sigma(s)dW(s)\right\},$$

另外，由 $\widetilde{W}(\tau)$ 及 $\hat{t}(t)$ 的定义，易见

$$\widetilde{W}\left[\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right]=\widetilde{W}\left[\int_{t_0}^{\hat{t}}\sigma^2(s)ds\right],\qquad a.s.$$

(3) 由(1)，(2) 即可推得

$$\int_{t_0}^{t}\sigma(s)dW(s)=\widetilde{W}\left[\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right],\quad a.s.$$

事实上，由 $\widetilde{W}(\tau)$ 的定义得

$$\widetilde{W}\left[\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right]=\int_{t_0}^{t\left[\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right]}\sigma(s)dW(s),$$

再由 $t(\tau)$ 的定义有

$$t\left[\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right]=\inf\left\{u;\int_{t_0}^{u}\sigma^2(s)ds\right.$$

$$\left.=\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right\}\quad(\text{由 }\hat{t}(t)\text{的定义})$$

$$=\hat{t}(t)\triangleq\hat{t},$$

从而有

$$\widetilde{W}\left[\int_{t_0}^{t}\sigma^2(s)ds\right]=\int_{t_0}^{\hat{t}}\sigma(s)dw(s)\qquad(\text{由}(2))$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sigma(s)dW(s).\ a.s.\ \blacksquare$$

以后，我们还将需要下面的 Хинчин 定理 [1]（或见 Friedman[2] 定理3.3.1）。

重对数律：如果 $W(t)$ 为一 Wiener 过程，则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1, \quad a.s.$$

下面我们令 $\tau(t)=\int_0^t \sigma^2(s)\,ds$,

$$J(t)=\frac{\int_0^t\left[b(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right]ds}{\left\{2\int_0^t\sigma^2(s)ds\ln\ln\left[\int_0^t\sigma^2(s)ds\right]\right\}^{1/2}}.$$

定理3.3 若 $\tau(\infty)<\infty$, 则系统(3.3)的平凡解是

(1) 几乎必然稳定的 $\Longleftrightarrow \limsup\limits_{t\to\infty}\int_0^t b(s)ds<\infty$;

(2) 几乎必然渐近稳定的 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t b(s)ds=-\infty$.

如果 $\tau(\infty)=\infty$, 则 $\limsup\limits_{t\to\infty} J(t)<-1$ 是几乎必然渐近稳定的一个充分条件，而 $\liminf\limits_{t\to\infty} J(t)>-1$ 是几乎必然不稳定的一个充分条件。

【证明】 由引理3.2, 我们可表过程

$$\eta(t)=\int_0^t\left[b(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right]ds+\widetilde{W}\left[\int_0^t\sigma^2(s)ds\right],$$

而且(3.3)的解过程为 $x(t)=x_0e^{\eta(t)}$, 再由命题3.2知(3.3)的平凡解是几乎必然稳定的 $\Longleftrightarrow \limsup\limits_{t\to\infty}\eta(t)<\infty, a.s.$ 由设 $\tau(\infty)<\infty$, 且 $\widetilde{W}(\tau)$ 为Wiener过程, 故 $\sup\limits_{0\le\tau\le\tau_0}\widetilde{W}(\tau)<\infty, a.s.$ 从而有

$$\limsup_{t\to\infty}\eta(t)<\infty,\ a.s.\Longleftrightarrow \limsup_{t\to\infty}\int_0^t b(s)ds<\infty.$$

同样, (3.3)的平凡解是几乎必然渐近稳定的 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=-\infty,\ a.s.\Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty}\int_0^t b(s)ds=-\infty.$$

如果 $\tau(\infty)=\infty$，则

$$\liminf_{t\to\infty} J(t)+\limsup_{t\to\infty}\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{(2\tau(t)\ln\ln\tau(t))^{1/2}}$$

$$\leqslant\limsup_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{[2\tau(t)\ln\ln\tau(t)]^{1/2}}$$

$$\leqslant\limsup_{t\to\infty} J(t)+\limsup_{t\to\infty}\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{[2\tau(t)\ln\ln\tau(t)]^{1/2}}.$$

若 $\limsup\limits_{t\to\infty} J(t)<-1$，则由重对数律知

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{[2\tau(t)\ln\ln\tau(t)]^{1/2}}=1, \qquad a.s.$$

从而

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{[2\tau(t)\ln\ln\tau(t)]^{1/2}}<0,$$

然而由设，$\tau(\infty)=\infty$，故

$$\lim_{t\to\infty}[2\tau(t)\ln\ln\tau(t)]^{1/2}=+\infty,$$

于是有 $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=-\infty$，$a.s.$ 从而推得(3.3)的平凡解是几乎必然渐近稳定的。

可类似地讨论不稳定的充分条件。∎

〔注〕（1）由Itô与Отратонович方程之间的关系式（第2章的(2.75)式），易见对于 $\tau(\infty)<\infty$ 情形的定理3.3的结论，对于Отратонович方程：

$$dx(t)=b(t)x(t)dt+\sigma(t)x(t)d^{*}W(t)$$

仍然成立。

对于 $\tau(\infty)=\infty$ 时的结论，如果函数 $J(t)$ 是以

$$J_1(t)=\frac{\int_{t_0}^{t}b(s)ds}{[2\tau(t)\ln\ln\tau(t)]^{1/2}}$$

来替代，则也仍然成立。

因此推导方程 $\dot{x}=b(t)x$ 的不稳定解 $x\equiv0$，不能通过参数 $b(t)$ 的物理可行扰动来稳定化。对于常数 b，在第 2 章的 §2.7 已证明这一点。

（2）由定理 3.3 和注(1)推得，若 $\int_0^{\infty}\sigma^2(s)ds<\infty$，则随机噪声不影响系统 $\dot{x}=bx$ 的稳定性质。

*§3.2 关于矩的微分方程

我们知道，一个具有常系数线性齐次的确定性系统的解可由一个辅助的代数方程(即特征方程)的根来决定。遗憾的是对于随机系统，显然没有类似的简化方法。然而正如很多作者(见Leibowitz[3],Gihman[4]等)已经指出的，决定线性系统(3.1)的各阶矩的问题，可化为解一个确定性的线性微分方程辅助系统。为此，我们将(3.1)表为等价的积分方程形式：

$$X^{t_0X_0}(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}B(u)X^{t_0X_0}(u)du$$
$$+\sum_{r=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(u)X^{t_0X_0}(u)dW_r(u)\ .$$

计算上式两端关于 $X(t_0)=X_0$ 的条件期望，并令

$$m_1(t)=EX^{t_0X_0}(t)=E_{t_0X_0}X(t),$$

从而即得下列齐次常微系统：

$$\frac{dm_1}{dt}=B(t)m_1,\quad m_1(t_0)=X_0, \tag{3.7}$$

其中 $B(t)=(b_i^j(t))$。

关于二阶、三阶等矩的方程系统，可利用第 2 章的 Itô 公式(2.8)导得。

例如，利用Itô 公式于函数 x_ix_j，可得

$$d(x_i(t)x_j(t))=x_i(t)dx_j(t)+x_j(t)dx_i(t)$$

$$+\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(t)X(t))_i(\sigma_r(t)X(t))_j dt$$

$$=[x_i(t)(B(t)X(t))_j+x_j(t)(B(t)X(t))_i]dt$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\{[x_i(t)(\sigma_r(t)X(t))_j+x_j(t)(\sigma_r(t)X(t))_i]dW_r(t)$$

$$+(\sigma_r(t)X(t))_i(\sigma_r(t)X(t))_j dt\}$$

以积分形式表示这一关系式并取期望，我们得到下列常微分方程系统：

$$\frac{dm_{ij}}{dt}=\sum_{n=1}^{l}\{b_i^n(t)m_{jn}(t)+b_j^n(t)m_{in}(t)$$

$$+\sum_{s,n=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_{ir}^s(t)\sigma_{jr}^n(t)m_{sn}(t)\}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,l). \qquad (3.8)$$

其未知函数$m_{ij}(t)=E[x_i^{t_0X_0}(t)x_j^{t_0X_0}(t)]$. 因为$m_{ij}(t)=m_{ji}(t)$，所以系统包含了$l(l+1)/2$个独立方程。

用同样的方法可得到关于

$$m_{i_1i_2i_3}(t)=E[x_{i_1}^{t_0X_0}(t)x_{i_2}^{t_0X_0}(t)x_{i_3}^{t_0X_0}(t)]$$

的方程等等。

〔注〕（1）比较方程（3.7）与（3.1），易见如果系统（3.1）是按均值稳定的，则通过遏止"波动"项而得到的确定性系统也是稳定的。

（2）因为$E|X^{t_0X_0}(t)|^2=m_{11}(t)+\cdots+m_{ll}(t)$，

故推得系统(3.1)是按均方稳定的(均方渐近稳定或均方指数稳定的)，当且当确定性系统（3.8）是在相应意义下稳定的。

若系数b_i^j和σ_{ir}^j均为常数，则系统（3.1）是按均方渐近（指数）稳定的充要条件是

$$|\lambda I-\widetilde{B}|=0 \qquad (3.9)$$

的根有负实部。（这里$\widetilde{B}$为系统（3.8）的矩阵，I是$l^2\times l^2$的单位矩阵）

（3）方程（3.9）的根均为系数b_i^j和σ_{ir}^j的连续函数，于是，若具有常系数的系统（3.1）是按均方渐近稳定的，则对于一个具有稍稍偏离（3.1）的那些系数的系统同样成立。

§3.3 指数 p 稳定性与 q 不稳定性

本节我们将给出第 2 章有关定理的某些改进和应用。证明了对于线性系统：

$$dX(t)=B(t)X(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t)X(t)dW_r(t) \qquad (3.10)$$

的指数 p 稳定性与 q 不稳定性的充要条件。

在整个一节中，我们将假设函数 $\|B(t)\|$，$\|\sigma_r(t)\|$ 均为有界。

一、指数 p 稳定性的充要条件

定理 3.4 系统(3.10)的解 $X(t)\equiv 0$ 是指数 p 稳定的充要条件是存在一个关于 X 是 p 次的齐次函数 $V(X,t)$，使得对于某些常数 $k_i>0$，有

$$k_1|X|^p\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^p,\quad LV(X,t)\leqslant -k_3|X|^p,$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leqslant k_4|X|^{p-1},\quad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqslant k_4|X|^{p-2}, \qquad (3.11)$$

$$(i,j=1,2,\cdots,l)$$

【证明】 充分性由定理 2.36 立即推得。现证必要性。因为系统 (3.10)的系数关于 X 有任意阶的有界导数，因此根据定理 2.37 的证明，令

$$V(X,t)=\int_t^{t+T}E|X^{t,X}(u)|^p du, \qquad (3.12)$$

并由该定理的证明推得得此函数满足(3.11)。

下面我们来证明 $V(X,t)$ 是 p 次齐次函数。事实上，由线性 Itô 方程解的性质(1)知，系统(3.10)满足初始条件

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_l)^T$ 的解 $X^{tX}(u)$ 可表为

$$X^{tX}(u)=\sum_{i=1}^{l} x_i X^i(u), \tag{3.13}$$

其中，$(X^{(1)}(u),\cdots,X^{(l)}(u))$ 为方程 (3.10) 满足初始条件 $x_j^{(i)}(t)=\delta_j^i$(δ_j^i 为Kronecker符号)的一个基本解组. 将(3.13)代入(3.12)即可看出 $V(X,t)$ 是 p 次齐次的。 ∎

在定理 3.4 的应用中，我们当然喜欢借助于相对较小一类的齐次函数来判定随机系统的指数 p 稳定性。遗憾的是对于一般情形，还没有这类结果，然而对于偶数 p 有下面的定理。

定理 3.5 系统 (3.10) 是偶数阶指数 p 稳定的 ($p=2,4,\cdots$) 一个必要条件是对于每个系数是时间的连续有界函数的 p 次正定齐式 $W(X,t)$，存在一个同样次数的正定齐式 $V(X,t)$，使得

$$LV=-W$$

以"对于某个……"来替代定理中的"对于每个……"，则同样的条件也是充分的。

【证明】 我们只要注意到关于正定齐式的一些性质，则此定理的证明就类似于定理 3.4。不同的只是替代函数 (3.12)，考虑函数

$$V_1(X,t)=E\int_t^{\infty} W(X^{tX}(u),u)\,du,$$

这里积分的无穷上限不会引起困难，因为作为 X 的函数 $V_1(X,t)$ 所需的光滑性，由该函数是 X 的一个齐式.

如果(3.10)中的系数矩阵 B 和 σ_r 均为常数，即 (3.10) 化为

$$dX(t)=BX(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r X(t)dW_r(t), \tag{3.14}$$

则定理3.5中的齐式$V(X,t)$与$W(X,t)$，可以具有常系数的齐式$V(X)$与$W(X)$来替代，此时对于偶数的p，由定理3.5可推得下面关于指数p稳定性的代数准则。

代数准则：给定某个p次正定齐式$W(X)$，寻求一个同样次数的一个齐式$V(X)$，使得$LV=-W(X)$.为此，可用比较此方程两端的单项式：$x_1^{k_1},\cdots,x_l^{k_l}(\sum_{i=1}^{l}k_i=p)$系数的方法得到一个关于$V(X)$系数的线性方程组。由定理3.5推得，此系统是指数$p$稳定的充要条件是上面导得的函数$V(X)$是正定的。

对于确定性系统，这种方法就是所谓Četaev方法（见[6]），此方法对于随机系统均方稳定性的应用，首先是由Kac与Krasovskii[7]给出的。

二、指数q不稳定性的充要条件

类似于定理3.4，我们立即可得下面的

定理3.6 系统(3.10)的解$X(t)\equiv0$是指数q不稳定的，当且仅当存在一个关于X的$(-q)$次齐次函数$V(X,t)$，使得对于某些常数$k_i>0$，有

$$k_1|X|^{-q}\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^{-q},\quad LV(X,t)\leqslant -k_3|X|^{-q},$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leqslant k_4|X|^{-q-1}\qquad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqslant k_4|X|^{-q-2}.$$

$$(i,j=1,2,\cdots,l)$$

利用定理2.39和定理2.40即可推得此定理的证明。

推论3.7 对于任意q，一个确定性定常线性系统$\frac{dX}{dt}=BX$是q不稳定的充要条件是特征方程$|\lambda I-B|=0$

的所有根 λ_i 有正实部。

事实上，我们知道使得齐式 $\frac{d^0W}{dt}=LW$ 也是正定的正定二次型 $W(X)$ 存在的充要条件是 $\mathrm{Re}\,\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,l$，于是令 $V(X)=[W(X)]^{-q/2}$，易见此函数满足定理 3.6 的所有条件，从而推得上面的结论。

三、例

下面示例说明本节定理的应用。

例 3.1 具有常系数 b 和 σ 的一维系统：

$$dx(t)=bx(t)dt+\sigma x(t)dW(t)$$

的微分生成算子

$$L=bx\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

令 $V(x)=|x|^p$，于是

$$LV=p|x|^p[b+\frac{\sigma^2}{2}(p-1)].$$

由定理 3.4 推得，在此情形，$b+\frac{\sigma^2}{2}(p-1)<0$ 是该系统指数 p 稳定性的一个充分必要条件。当然这结论也可直接由它的解的表达式(3.4)推得。

例 3.2 考虑线性定常系统

$$dX(t)=BX(t)dt+\sum_{r=1}\sigma_rX(t)dW_r(t) \tag{3.14}$$

指数 p 稳定性的某些充分条件。

按上一章的记号，此系统的微分算子为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+[BX,\ \frac{\partial}{\partial X}]+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}[\sigma_rX,\ \frac{\partial}{\partial X}]^2.$$

下面我们仅限于讨论正定二次型：$(WX, X)=\sum\limits_{i,j} W_{ij}x_ix_j$ 的幂次的 Ляпунов 函数。为此，令

$$V(X)=(WX, X)^{p/2},$$

记 B^* 为 B 的相伴矩阵，$\lambda^D_{\min}=\lambda^D_1<\lambda^D_2<\cdots<\lambda^D_l=\lambda^D_{\max}$ 均为 $l\times l$ 对称矩阵 D 的特征值。另外，令

$$m=\inf_{|x|=1}\lambda^{A(X)}_{\min}\quad M=\sup_{|x|=1}\lambda^{A(X)}_{\max}\ (\text{其中}A(X)\text{见下面})$$

首先注意到，对于任意半正定对称矩阵 D_1 和 D_2，有

$$\lambda^{D_1}_{\min}\operatorname{tr}D_2<\operatorname{tr}(D_1D_2)<\lambda^{D_1}_{\max}\operatorname{tr}D_2. \tag{3.15}$$

此不等式通过化为 D_1 对角型是容易证明的。

其次，

$$LV=p(WX, X)^{\frac{p}{2}-1}\Big[\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A(X)W)+((WB$$

$$+B^*W)X, X)+\Big(\frac{p}{2}-1\Big)\operatorname{tr}(A(X)F(X))\Big]$$

$$=p(WX, X)^{\frac{p}{2}-1}\Phi(X), \tag{3.16}$$

其中
$$A(X)=(a_{ij}(X))=\Big(\sum_{n,m=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma^n_{ir}\sigma^m_{jr}x_nx_m\Big),$$

$$F(X)=(f_{ij}(X))=\Big(\frac{(WX)_i(WX)_j}{(WX, X)}\Big).$$

由前面的定理推得线性系统 (3.14) 是指数 p 稳定的一个充分条件是 $\Phi(X)$（(3.16) 的方括号中的式子）对 $X\neq 0$ 是负的。但如果 $\Phi(X)\geqslant 0$，则系统是指数 p 不稳定的（见第 2 章§2.9末的注(2)）。

由(3.15)和(3.16)推得，对于 $p\geqslant 2$，

$$\Phi(X)\leqslant\frac{1}{2}\lambda^{A(X)}_{\max}\operatorname{tr}W+((WB+B^*W)X, X)$$

$$+\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\max}^{(x)}\frac{(W^2X,X)}{(WX,X)}$$

$$\leqslant\left[M\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}W+\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\max}^{W}\right)+\lambda_{\max}^{WB+B^*W}\right](X,X)$$

(3.17)

$$\Phi(X)\geqslant\left[m\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}W+\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\min}^{W}\right)+\lambda_{\min}^{WB+B^*W}\right](X,X)$$

(3.18)

因此，我们看到，若对于某个 $p\geqslant 2$，存在一个正定矩阵 W，使得

$$M\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}W+\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\max}^{W}\right]+\lambda_{\max}^{WB+B^*W}<0, \tag{3.19}$$

则对于此 p，系统是指数 p 稳定的。另一方面，若

$$m\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}W+\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\min}^{W}\right]+\lambda_{\min}^{WB+B^*W}\geqslant 0, \tag{3.20}$$

则此系统是指数 p 不稳定的。

类似地，如果对于某个 $p\leqslant 2$，存在一个正定矩阵 W，使得

$$\frac{1}{2}M\operatorname{tr}W+m\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\min}^{W}+\lambda_{\max}^{WB+B^*W}<0, \tag{3.21}$$

则系统(3.10)是指数 p 稳定的。然而，如果

$$\frac{1}{2}m\operatorname{tr}W+M\left(\frac{p}{2}-1\right)\lambda_{\max}^{W}+\lambda_{\min}^{WB+B^*W}\geqslant 0, \tag{3.22}$$

则此系统是指数 p 不稳定的。

虽然由(3.19)—(3.22)所提供的条件都是很弱的，但下面我们来表明，在某种特殊情形，它们给出了指数 p 稳定性的充要条件。

设 $\sigma(X)=\delta|X|^2I$(这里 I 为单位矩阵)，则 $M=m=\delta$。

现在假设 $B+B^*=-\lambda I$，并置$W=I$，则由(3.17)—(3.22)推得此系统是指数p稳定的，当且仅当$\frac{1}{2}\delta(l+p-2)<\lambda$。类似地，表明此系统是指数$q$不稳定的，当且仅当$\frac{1}{2}\delta(l-q-2)>\lambda$，对于某个正的$q$.

§3.4 指数p稳定性与q不稳性(续)

在确定性情形，一个渐近稳定的常系数线性系统一定是指数稳定的；一个一致渐近稳定的时变系统也是指数稳定的。试问：在随机线性系统中是否有类似的结果？答案是肯定的。本节仅对常系数线性随机系统，证明这类似的结果，下节再考虑时变系统情形。为此，我们先来建立几个引理。

一、几个引理

引理3.8 如果常系数线性随机系统

$$dX(t)=BX(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r X(t)dW_r(t) \tag{3.23}$$

是随机稳定的，则对充分小的p，它是p稳定的。

【证明】 由设系统(3.23)是随机稳定的，则存在$\alpha>0$，使得

$$\sup_{|X|\leqslant 2^{-\alpha}} p\{\sup_{t\geqslant 0}|X^X(t)|>1\}\leqslant\frac{1}{2}, \tag{*}$$

因系统是线性的，由其解的性质可知，对任一$r>0$，有

$$X^{rX}(t)=\sum_{i=1}^{l}rx_iX^{(i)}(t)=r\sum_{i=1}^{l}x_iX^{(i)}(t)=rX^X(t), \tag{3.24}$$

其中$X=(x_1,x_2,\cdots,x_l)$，$\{X^{(i)}(t),i=1,2,\cdots,l\}$为满足初始

条件 $x_j^{(i)}(0)=\delta_j^i$ 的(3.23)的一个基本解组。

对任一 k，令 $r=2^{\alpha(k+1)}$，则 $r2^{-\alpha}=2^{\alpha k}$，故由（*）式有

$$\sup_{|X|<2^{\alpha k}} p\{\sup_{t\geq 0}|X^X(t)|>r\}$$

$$=\sup_{|X|<2^{\alpha k}} p\{\sup_{t\geq 0}|X^X(t)|>2^{\alpha(k+1)}\}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{3.25}$$

让 τ 记过程的轨道，关于集 $|X|=2^{\alpha}$ 的首达时，利用过程 $X(t)$ 的强马氏性及(3.25)，我们有

$$\sup_{|x|\leq 1} p\{\sup_{t\geq 0}|X^X(t)|>2^{2\alpha}\}$$

$$=\sup_{|X|\leq 1}\int_{u=0}^{\infty}\int_{|y|=2^{\alpha}} p\{\tau\in du, X^X(u)\in dy\}$$

$$p\{\sup_{t\geq 0}|X^y(t)|>2^{2\alpha}\}\quad(\text{由}k=1\text{的}(3.25))$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{|X|\leq 1} p\{\tau<\infty\}$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{|X|\leq 1} P\{\sup_{t>0}|X^X(t)|>2^{\alpha}\}\ (\text{由}k=0\text{ 的 }(3.25))$$

$$\leqslant\frac{1}{2^2},$$

……

一般，我们有

$$\sup_{|X|\leq 1} p\{\sup_{t\geq 0}|X^X(t)|>2^{k\alpha}\}\leqslant\frac{1}{2^k}. \tag{3.26}$$

现让 $X\in E_l$，使得 $|X|=1$，同时，$p<\dfrac{1}{\alpha}$，我们有

$$E[\sup_{t>0}|X^X(t)|^p]\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\alpha p}p\{2^{(k-1)\alpha}<\sup_{t\geq 0}|X^X(t)|<2^{k\alpha}\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\alpha p}p\{\sup_{t>0}|X^X(t)|>2^{(k-1)\alpha}\}\qquad(\text{由}3.26\text{ 式})$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\alpha p}2^{-(k-1)}=2\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(1-\alpha p)}\quad(\text{因}p<\frac{1}{\alpha},\text{ 故}(1-\alpha p)>0)$$

$$=K(p)<\infty, \tag{3.27}$$

因$|X|\cdot\frac{X}{|X|}\leqslant\delta\tilde{X}$，且$|\tilde{X}|=1$并由(3.24)，对任一$\delta>0$，有

$$\sup_{|X|\leqslant\delta}E[\sup_{t>0}|X^X(t)|^p]$$

$$\leqslant E[\sup_{t>0}|\delta X^{\tilde{X}}(t)|^p] \quad (由(3.27)式)$$

$$\leqslant\delta^p\cdot K(p). \quad \blacksquare$$

引理3.9 如果系统(3.23)是随机渐近稳定的，则对于充分小的p，它是渐近p稳定的。

【证明】 设$X\in E_l$且$|X|=1$，则由(3.27)对某个$p>0$，有

$$E[\sup_{t>0}|X^X(t)|^p]<K. \tag{3.28}$$

此外，正如§2.1所述，一个线性系统是随机渐近稳定的，当且仅当它是大范围随机渐近稳定的。则对上述初值X，有

$$X^X(t)\to0,\ a.s.\ 当t\to\infty时。 \tag{3.29}$$

由(3.28)、(3.29)及Lebesgue有界收敛定理，有

$$E|X^X(t)|^p\to0,\ 当t\to\infty时。$$

再由引理3.8知它也是p稳定的，这就证明了它是渐近p稳定的。

引理3.10 如果系统(3.23)，对于某个p是渐近p稳定的，则它也是指数p稳定的。

【证明】 首先，我们证明在引理的假设下，对每$Q<1$，存在一个$T>0$，使得

$$\sup_{|X|=1}E|X^X(T)|^p\leqslant Q. \tag{3.30}$$

为此，设$\{X^{(i)}(t),\ i=1,2,\cdots,l\}$为系统(3.23)满足初始条

作 $x^{(i)}_{0j}=\delta^i_j, i,j=1,2,\cdots,l$ 的一个基本解组，由设 (3.23) 是渐近 p 稳定的，并由线性系统解的性质可知，对充分大的 T，有

$$E|X^{(i)}(T)|^p<\frac{Q}{l^{p+1}}\quad,$$

其次，再利用不等式：$|A_1+\cdots+A_l|^p\leqslant l^p(|A_1|^p+\cdots+$
$+|A_l|^p)$，

易见，如果 $|X|=1$，则

$$E|X^X(T)|^p=E|\sum_{i=1}^{l}x_iX^{(i)}(T)|^p \qquad \text{（由上不等式）}$$

$$\leqslant E[l^p\sum_{i=1}^{l}|x_i|^p|X^{(i)}(T)|^p] \text{（因 } |X|=1\text{）}$$

$$\leqslant l^p\sum_{i=1}^{l}E|X^{(i)}(T)|^p\leqslant Q \qquad \text{即(3.30)成立。}$$

现在选取一个使得(3.30)成立的 T，并令 $Q=e^{-1}$，于是对任一X，由(3.24)有 $X^X(T)=|X|X^{\frac{X}{|X|}}(T)$，故

$$E|X^X(T)|^p=|X|^pE|X^{\frac{X}{|X|}}(T)|^p \quad \text{（由(3.30)式）}$$
$$\leqslant e^{-1}|X|^p. \tag{3.31}$$

从而由马氏性我们得到

$$E|X^X(2T)|^p=\int_{E_l}p(X,T,dy)E|X^y(T)|^p \text{（由(3.31)式）}$$

$$\leqslant e^{-1}\int_{E_l}p(X,T,dy)|y|^p=e^{-1}E|X^X(T)|^p \text{（由(3.31)式）}$$
$$\leqslant e^{-2}|X|^p. \tag{3.32}$$

……

一般，我们有 $E|X^X(kT)|^p\leqslant e^{-k}|X|^p$。

对任一 $t>0$，令 $t=nT+t_1$ $(0\leqslant t_1<T)$，且令

$$K=\sup_{t>0,|x|=1} E|X^x(t)|^p$$

由引理 3.8，有 $K<\infty$，于是有

$$E|X^X(t)|^p=\int_{E_l} P(X,nT,dy)E|X^y(t_1)|^p$$

$$=\int_{E_l} P(X,nT,dy)|y|^p E|X^{\frac{y}{|y|}}(t_1)|^p$$

$$\leqslant KE|X^X(nT)|^p \leqslant K|X|^p e^{-n} \quad (\text{因} n=\frac{t-t_1}{T})$$

$$\leqslant Ke|X|^p e^{-\frac{t}{T}}=K_1|X|^p e^{-\frac{t}{T}} .$$

此即为所求。 ▌

二、主要结果

由引理 3.9 与 3.10，立即有下面的定理。

定理 3.11 如果常系数线性系统(3.23)是随机渐近稳定的，则对于所有充分小的 $p>0$，它是指数 p 稳定的。

对于 q 不稳定性，有类似的定理。

定理 3.12 如果常系数线性系统(3.23)的解，满足下面的条件：

$$P\{|X^X(t)|\to\infty, \text{当} t\to\infty \text{时}\}=1 , \text{对于} X\neq 0,$$

则此系统对于所有充分小的 $q>0$，它是指数 q 不稳定的。

定理 3.11 和 3.12，对于时变系数的随机线性系统不成立。例如，确定性系统：$\frac{dx}{dt}=-(t+1)x$ 是渐近稳定但非指数稳定的。然而，如果我们增加某种假设，则可以证明类似的引理 3.8 和 3.10，因而也有定理 3.11，但首先必须引进有关稳定性与不稳定性的新的定义，然后研究满足这些定义

的系统的性质，这就是我们下节的内容。

§3.5 大范围随机一致稳定性

设

$$dX(t)=b(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t)$$
$$X(s)=X,\ a.s. \tag{3.33}$$

一、定义与引理

定义3.1 系统(3.33)的平凡解是称为大范围关于$t(>0)$随机一致稳定的，如果它是随机一致稳定的。此外，对任一$X\in E_l$，$\varepsilon>0$都有

$$\sup_{s>0}P\{\sup_{u>s+T}|X^{sX}(u)|>\varepsilon\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0. \tag{3.34}$$

〔注〕(1)由(3.34)推得，如果系统(3.33)是大范围随机一致稳定的，则它必是定义2.8意义下大范围随机渐近稳定的。事实上，我们有下面的等价事件：

$$\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\sup_{u>s+n}|X^{sx}(u)|>\varepsilon\}=\{\lim_{t\to\infty}\sup X^{sx}(t)>\varepsilon\},$$

故由(3.34)有

$$P\{\lim_{t\to\infty}\sup|X^{sx}(t)|>\varepsilon\}=\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{u>s+n}|X^{sx}(u)|>\varepsilon\}=0.$$

因ε是任意的，从而推得

$$P\{\lim_{t\to\infty}X^{sx}(t)=0\}=1\text{对任意 }\varepsilon\geqslant0,\ X\in E_l.$$

(2)系统(3.33)的解$X(t)\equiv0$是大范围随机一致稳定的一个充分条件为它是一致随机稳定的，此外，对任一$X\in E_l$，$\varepsilon>0$ 有

$$\sup_{s>0}P\{|X^{sx}(s+T)|>\varepsilon\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0. \tag{3.35}$$

事实上，我们有

$$P\{\sup_{u>s+T}|X^{sx}(u)|>\varepsilon\}=\left(\int_{|y|<\delta}+\int_{|y|\geqslant\delta}\right)P(s,X,s+T,dy)$$

$$\times P\{\sup_{u>s+T}|X^{s+T,y}(u)|>\varepsilon\}$$

$$\leqslant\sup_{s>0,|y|<\delta}P\{\sup_{u>s}|X^{s,y}(u)|>\varepsilon\}$$

$$+P\{X^{sx}(s+T)\geqslant\delta\},$$

第一项由随机一致稳定性，可选取一个适当的 δ 而使其任意小，第二项由（3.35），可选取一个适当的 $T>0$ 而使其任意小.

关于大范围随机一致稳定性的其它充分条件，我们将在下面给出.

引理 3.13 方程(3.30) 的解 $X(t)\equiv0$ 是大范围关于 $t(>0)$ 随机一致稳定的一个充分条件为它是随机一致稳定的，並且关于不同的初值 s,X，过程族$\{X^{sX}(t)\}$，对于任一 $\varepsilon>0$，关于集$|X|<\varepsilon$，在下面的意义下是一致常返的

$$\sup_{s>0}P\{\tau_{\varepsilon}^{sX}-s>T\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,\qquad(3.36)$$

这里 τ_{ε}^{sX} 为过程 $X^{sX}(t)$ 关于集$|X|=\varepsilon$ 的首达时.

【证明】 显然，对任一$\varepsilon>0$，$\delta>0$ (为确定起见，不妨设 $\delta<\varepsilon$) 和 $T>0$，我们有

$$\{\sup_{u>s+T}|X^{sX}(u)|>\varepsilon\}\subset\{\tau_{\delta}^{sX}>s+T\}$$

$$\cup\{\tau_{\delta}^{sX}\leqslant s+T,\ \sup_{u>\tau_{\delta}^{sX}}|X^{sX}(u)|>\varepsilon\}.$$

因此，利用强马氏性有

$$P\{\sup_{u>s+T}|X^{sX}(u)|>\varepsilon\}\leqslant P\{\tau_{\delta}^{sX}-s>T\}$$

$$+\int_{v=s}^{s+T}\int_{|y|=\delta}P\{\tau_{\delta}^{sX}\in dv,X^{sX}(\tau_{\delta}^{sX})\in dy\}\cdot P\{\sup_{u>v}|X^{vy}(u)|>\varepsilon\}$$

$$\leqslant P\{\tau_{\delta}^{sX}-s>T\}+\sup_{v>0,|y|=\delta}P\{\sup_{u>v}|X^{vy}(u)|>\varepsilon\}.$$

上式右端第一项由过程族$\{X^{sX}(t)\}$关于$|X|<\delta$ 的一致常返性，可选择一个适当的 $T>0$ 而使其任意小，第二项由过程

的随机一致稳定性，可选择一个适当的 $\delta>0$ 而使其任意小，由于 $\varepsilon>0$ 是任意的且 $s\geqslant 0$，$X\in E_t$ 也是任意的，故证得(3.33)的 $X(t)\equiv 0$ 是大范围关于 $t(>0)$ 随机一致稳定的。 ■

〔注〕 一致常返性条件(3.36)成立的一个充分条件是在区域 $|X|>\varepsilon$ 中，存在一个函数 $V(X,t)$，使得

$$\left.\begin{aligned}&\inf_{|X|\geqslant R,\,t\geqslant 0} V(X,\ t)=V_R\to\infty,\ \text{当 } R\to\infty \text{ 时},\\ &\sup_{\varepsilon\leqslant|X|\leqslant\delta,\,t\geqslant 0} V(X,\ t)=V(\delta)<\infty.\end{aligned}\right\}\tag{3.37}$$

$$LV<-k,\ \ (k>0)\tag{3.38}$$

事实上，条件(3.37)和(3.38)由定理2.4及其注(1)知过程 $X(t)$ 是正则的，再由常返性充分条件引理2.23(此时 $\beta(t)=\int_0^t k\,ds=kt$)有

$$E_{sX}\beta(\tau_s)\leqslant\beta(S)+V(X,s),$$

$$\begin{aligned}E(k\tau_s^{sX}-ks)&=kE(\tau_s^{sX}-s)\leqslant V(X,s)\\ &\leqslant\sup_{\varepsilon\leqslant|Y|\leqslant|X|}V(Y,s)\ (\text{由(3.37)式})\\ &=V(|X|)<\infty,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&P\{\tau_s^{sX}-s>T\}\ (\text{由 Чебышев 不等式})\\ &\leqslant\frac{E(\tau_s^{sX}-s)}{T}\ (\text{由上不等式})\\ &\leqslant\frac{V(|X|)}{kT}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

据此注以及定理2.21前面的注(随机一致稳定性条件)，有下面的引理.

引理3.14 方程(3.33)的解 $X(t)\equiv 0$ 是大范围关于 $t(\geqslant 0)$ 随机一致稳定的一个充分条件是存在一个具有无穷小上界的正定函数 $V(X,t)\in C_2^0(E)$，使得函数 LV 是负定的，并且(3.37)成立。

比较此引理与定理2.30，我们有：

系统是大范围随机一致稳定的，如果存在一个 Ляпунов

函数 V 满足定理 2.30的条件并使得 $\sup_{t>0} V(X,t)$ 在任一关于 X 的有界区域内是有界的。

现在我们对时变线性系统来建立类似于引理 3.8 和定理 3.11的结果。考虑系统:

$$dX(t)=B(t)X(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t)X(t)dW_r(t). \qquad (3.39)$$

引理 3.15 如果系统(3.39)是随机一致稳定的，则对于充分小的 $p(>0)$，它是 p 稳定的，并且存在一个 $\alpha>0$，使得对于所有 $k=1,2,3,\cdots$，有

$$\sup_{s>0,|X|<1} P\{\sup_{t\geq s}|X^{sX}(t)|>2^{k\alpha}\}\leq\frac{1}{2^k}. \qquad (3.40)$$

不等式(3.40)的证明，除了要利用随机一致稳定性来替代引理3.8中的随机稳定性外，其它完全重复不等式(3.26)的证明，与从(3.26)导得引理 3.8 一样，由(3.40)我们导得引理的第一个结论。

二、主要结果

类似于定理 3.11，有下面的定理。

定理 3.16 系统 (3.39)的平凡解是大范围关于 $t(>0)$ 随机一致稳定的，则对于充分小的正 p，它是指数 p 稳定的。

【证明】 类似于引理 3.10 的证明，只要验证：存在一个 $T>0$，使得对于所有正 $p<\alpha$，有

$$\sup_{s>0,|x|=1} E|X^{sX}(s+T)|^p<1 \qquad (4.41)$$

即可。事实上，定理的结论可由(3.30)推出引理 3.10 的同样方法，从(3.41)推得。

现在，如同在(3.27)情形中一样地进行，对任意 $\alpha>0$，$n>0$，$p>0$，易见

$$E|X^{sX}(s+T)|^p \leqslant E[\sup_{t\geqslant s+T}|X^{sX}(t)|^p]$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha p}P\{2^{(k-1)\alpha}\leqslant \sup_{t\geqslant s+T}|X^{sX}(t)|<2^{k\alpha}\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\alpha p}P\{\cdots\cdots\}+\sum_{k=0}^{n}2^{k\alpha p}P\{\cdots\cdots\}+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{k\alpha p}P\{\cdots\cdots\}$$

$$<2^{-\alpha p}P\{\bigcup_{k=1}^{\infty}[2^{-(k+1)\alpha}\leqslant \sup_{t>s+T}|X^{sX}(t)|<2^{-k\alpha}]\}$$

$$+2^{n\alpha p}P\{\sup_{t\geqslant s+T}|X^{sX}(t)|\in\bigcup_{k=0}^{n}[2^{(k-1)\alpha},2^{k\alpha}]\}$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{k\alpha p}P\{2^{(k-1)\alpha}\leqslant \sup_{t\geqslant s+T}|X^{sX}(t)|<2^{k\alpha}\}$$

$$<2^{-\alpha p}+2^{n\alpha p}P\{\sup_{t>s+T}|X^{sX}(t)|>2^{-\alpha}\}$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{k\alpha p}P\{\sup_{t<s}|X^{sX}(t)|>2^{\alpha(k-1)}\},$$

现在，选取如同引理 3.15 中的 α，並利用(3.40)，则有

$$E|X^{sX}(s+T)|^p\leqslant 2^{-\alpha p}+2^{n\alpha p}P\{\sup_{t>s+T}|X^{sX}(t)|>2^{-\alpha}\}$$

$$+2\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{k(\alpha p-1)}.$$

现选取 $p<\frac{1}{\alpha}$，然后让 n 充分大，使得

$$2\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{k(\alpha p-1)}<\frac{1}{2}(1-2^{-\alpha p}),$$

最后由大范围随机一致稳定性定义(3.34)，可选取足够大的 T，使得

$$2^{\alpha r}\sup_{s>0,|X|=1}P\{\sup_{t\geq s+T}|X^{sX}(t)|>2^{-\alpha}\}<\frac{1}{2}(1-2^{-\alpha p})$$

从而得，

$$\sup_{s>0,|X|=1}E|^{sX}(s+T)|^{r}<1. \quad ∎$$

定义 3.2 系统(3.33)的平凡解是称为随机一致不稳定的，如果对任一$X\neq0, A>0$，有

$$\sup_{s>0}P\{\sup_{t\geq s+T}|X^{sX}(u)|<A\}\underset{T\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

由定理 3.16，我们有下面类似的不稳定性定理。

定理 3.17 如果线性系统(3.39)在定义 3.2 的意义下是随机一致不稳定的，则对于充分小的正数 q，此系统是指数 q 不稳定的。

§3.6 常系数随机线性系统的渐近稳定性

本节的主要目的是研究常系数随机线性微分方程：

$$dX(t)=BX(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r X(t)dW_r(t) \qquad (3.42)$$

的渐近稳定性条件。这里$B=(b_{ij})$，$\sigma_r=(\sigma_{ir}^{j})$均为常数矩阵。

为了导出关于系统 3.42 的渐近稳定性的充要条件，我们需要引进下面的概念。

定义 3.3 设 $p(X,t,A)$为时齐 Markov过程 $X(t)$的转移概率($t\geqslant0, X\in E_l$, $A\subset E_l$ 为任一 Borel 集)，如果存在相空间 E_l 上的一个概率测度 $\mathscr{P}$，使对任一时刻 $t>0$，有

$$\mathscr{P}(A)=\int_{E_l}P(X,t,A)\mathscr{P}(dX)，对任一Borel集A\subset E_l, \quad (3.43)$$

则称 $\mathscr{S}$ 为解过程 $X(t)$ 的**不变概率测度**。

〔注〕(3.43) 表示当过程的初态具有概率分布 $\mathscr{S}$ 时，此过程运动至任何时刻 t ($t\geqslant 0$)，都具有相同的概率分布。故 $\mathscr{S}$ 为过程 $X(t)$ 的**平稳分布**。

如同以前令

$$a_{ij}(X)=\sum_{r=1}^{k}\sum_{n,m=1}^{l}\sigma_{ir}^{n}\sigma_{jr}^{m}x_{n}x_{m},$$

$$A(X)=(a_{ij}(X)),$$

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\left[BX,\frac{\partial}{\partial X}\right]+\frac{1}{2}\left[A(X)\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}+\left[BX,\frac{\partial}{\partial X}\right]+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left[\sigma_{r}x,\frac{\partial}{\partial X}\right]^{2}$$

由算子 L，易见矩阵 $A(X)$ 是半正定的。

一、非退化情形

为了简单起见，我们首先假设矩阵 $A(X)$ 在下面的意义下是非退化的，即存在一个正常数 m，使得对任一 $\alpha\in E$ 有

$$[A(X)\alpha,\alpha]=\sum_{r=1}^{k}[\sigma_{r}X,\alpha]^{2}\geqslant m|X|^{2}\cdot|\alpha|^{2}. \qquad (3.44)$$

另外，引进新变量：

$$\lambda=\frac{X}{|X|},\quad \rho=\ln|X|.$$

于是过程 $\Lambda(t)=X(t)/|X(t)|$ 是在球面 $S=\{X;|X|=1\}$ 上的一个时齐马氏过程。为了验证这一点，只需利用 Itô 公式于 $\Lambda(t)$，从 $d\Lambda_i(t)$ 的表示式：

$$d\Lambda_i(t)=\Big[\sum_{j=1}^{l}b_{ij}x_j\Big(\frac{|X(t)|^2\delta_{ij}-x_ix_j}{|X|^3}\Big)$$

$$+\frac{3}{2}\sum_{r=1}^{k}\sum_{n,m=1}^{l}\sigma_{ir}^{n}\sigma_{jr}^{m}x_{n}x_{m}\Big(\frac{|X|^2\delta_{ij}-x_ix_j}{|X|^5}\Big)\Big]dt$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sigma_{ir}^{j}\,x_j\left(\frac{|X|^2 - x_i^2}{|X|^3}\right)dW_r(t)$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{l}b_{ij}\Lambda_j(1-\Lambda_i^2)+\frac{3}{2}\sum_{r=1}^{k}\sum_{n,m=1}^{l}\sigma_{ir}^{n}\sigma_{jr}^{m}\Lambda_n\Lambda_m\Lambda_i(1-\Lambda_i^2)\right]dt$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sigma_{ir}^{j}\Lambda_j(1-\Lambda_j^2)dW_r(t).$$

显然 dt 与 $dW_r(t)$ 的系数只依赖于 $\Lambda_1(t),\cdots,\Lambda_l(t)$，而不显含时间变数 t

条件(3.44)保证了过程 $\Lambda(t)$ 是遍历的，即它有一个平稳分布（见Hasminskii[8]的定理4.4.1）. 让 $\nu(d\lambda)$ 记为此过程在球面上的唯一不变测度。

其次，让 $\rho(t)=\ln|X(t)|$，利用 Itô 公式，有

$$d\rho(t)=L\rho(t)+\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r\Lambda(t),\Lambda(t))dW_r(t)$$

$$=[(B\Lambda(t),\Lambda(t))+\frac{1}{2}\mathrm{tr}A(\Lambda(t))$$

$$-(A(\Lambda(t))\Lambda(t),\Lambda(t))]dt$$

$$+\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r\Lambda(t),\Lambda(t))dW_r(t). \qquad (3.45)$$

由(3.45)易见，函数 $\rho(t)$ 的增量是过程 $\Lambda(t)$ 和 Wiener 过程 $W_r(t)$ 的一个泛函。令

$$Q(\lambda)=(B\lambda,\lambda)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,A(\lambda)-(A(\lambda)\lambda,\lambda),$$

$$a=\int_{s_l}Q(\lambda)\nu(d\lambda).$$

为了证明非退化情形系统(3.42)渐近稳定性的条件，我们需要下面的引理。

引理 3.18 设 $\sigma(t,\omega)$ 是一个使得 $E\sigma^2(t,\omega)<k^2$ ($k>0$ 为一常数）的函数，则随机积分

$$\int_0^t \sigma(s,\omega)dW(s)$$

满足

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma(t,\omega)dW(t)\to 0, \quad a.s. \quad 当T\to\infty时.$$

【证明】 令

$$A_{nm}=\{\omega: \sup_{T>2^n}\frac{1}{T}\left|\int_0^T \sigma(t)dW(t)\right|>\frac{1}{m}\}$$

$$A^{(m)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{nm}$$

由于

$$B=\{\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\int_0^T \sigma(t,\omega)dW(t)\right|>0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{nm},$$

而 $A_{nm}\supset A_{n+1,m}$； $A^{(m+1)}\supset A^{(m)}$，我们得到

$$\begin{aligned}P(B) &= P(\bigcup_{m=1}^{\infty}A^{(m)}) \ (因A^{(m)}\uparrow)\\ &= P(\lim_{m\to\infty}A^{(m)}) = \lim_{m\to\infty}P(A^{(m)})\\ &= \lim_{m\to\infty}P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{nm}) \quad (因A_{nm}\downarrow 关于n)\\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}P(A_{nm})\end{aligned}$$

如果对任一$m>0$，我们能证明 $\lim_{n\to\infty}P(A_{nm})=0$，则此引理得证.

因为过程$\int_0^t \sigma(s,\omega)dW(s)$ 是一个鞅，故$\left|\int_0^t \sigma(s,\omega)dW(s)\right|$为一下鞅，从而由下鞅不等式（定理2.17）推得

$$P\{\sup_{2^r\leq T\leq 2^{r+1}}\left|\int_0^T \sigma(t,\omega)dW(t)\right|>\varepsilon\}$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon}E\left|\int_0^{2^{r+1}}\sigma(t,\omega)dW(t)\right| \quad (由 Schwarz 不等式)$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}[E(\int_0^{2^{r+1}}\sigma(t,\omega)dW(t))^2]^{1/2}$$ (由随机积分的性质)

$$=\frac{1}{\varepsilon}(E\int_0^{2^{r+1}}\sigma^2(t,\omega)dt)^{1/2}$$ (由设 $E\sigma^2(t,\omega)<k^2$)

$$\leqslant\frac{k\cdot 2^{(r+1)/2}}{\varepsilon}.$$

令$\varepsilon=\varepsilon_0 2^r$，于是有

$$P\{\sup_{2^r\leqslant T\leqslant 2^{r+1}}\frac{1}{T}|\int_0^T\sigma(t,\omega)dW(t)|>\varepsilon_0\}$$

$$\leqslant P\{\sup_{2^r\leqslant T\leqslant 2^{r+1}}|\int_0^T\sigma(t,\omega)dW(t)|>\varepsilon_0 2^r\}\leqslant\frac{k\sqrt{2}\,2^{-\frac{r}{2}}}{\varepsilon_0}.$$

从而得

$$P(A_{nm})\leqslant\sum_{r=n}^{\infty}P\{\sup_{2^r\leqslant T\leqslant 2^{r+1}}\frac{1}{T}\int_0^T\sigma(t,\omega)dW(t)>\frac{1}{m}\}$$

$$\leqslant km\sqrt{2}\sum_{r=n}^{\infty}2^{-r/2}.$$

于是当 $n\to\infty$ 时，有 $P(A_{nm})\to 0$，引理得证。 ∎

定理3.19 假设条件(3.44)满足，且$a<0$，则系统(3.42)的解 $X(t)\equiv 0$ 是几乎必然渐近稳定的。如果 $a>0$，则对于 $X\neq 0$ 有

$$P\{|X^X(t)|\underset{t\to\infty}{\to}\infty\}=1. \tag{3.46}$$

【证明】 由(3.45)我们有

$$\frac{\rho(T)-\rho(0)}{T}=\frac{1}{T}\int_0^T Q(\Lambda(t))dt$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{r=1}^{k}\int_0^T(\sigma_r\Lambda(t),\Lambda(t))dW_r(t), \tag{3.47}$$

则由引理3.18，有

$$\frac{1}{T}\sum_{r=1}^{k}\int_0^T(\sigma_r\Lambda(t),\Lambda(t))dW_r(t)\underset{T\to\infty}{\to}0,\quad a.s.$$

再由过程$\Lambda(t)$的强大数律（见 Хасьминский[8] 定理 4.5.1）有

$$P\{\frac{1}{T}\int_0^T Q(\Lambda(t)dt)\underset{T\to\infty}{\to}\int_{S_l}Q(\lambda)\nu(d\lambda)\}=1,$$

故有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\rho(T)}{T}=a,\quad a.s. \tag{3.48}$$

这就意味着定理的两个部分结论。 ▌

定理 3.20 假设条件(3.44)满足，且$a=0$，则系统(3.42)的解$X(t)\equiv0$是既不渐近稳定也不是在(3.46)意义下的渐近不稳定。

【证明】假设解$X(t)\equiv0$是随机渐近稳定的，则由定理3.11知，对于充分小的$p>0$，它是指数p稳定的，从而由(3.45)及 Jensen 不等式得

$$E|X^{X_0}(T)|^p=|X_0|^pE\exp\{p[\int_0^T Q(\Lambda(s)ds$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\int_0^T(\sigma_r\Lambda(s),\Lambda(s))dW_r(s)]\}$$

(由Jensen不等式：$E(\exp\xi)\geqslant\exp\{E\xi\}$)

$$\geqslant|X_0|^p\exp\{p\int_0^T EQ(\Lambda(s))ds\}.$$

另方面，由设它是指数p稳定的，故有

$$E|X^{X_0}(T)|^p<A|X_0|^pe^{-\alpha T}.$$

从而得

$$\exp\{p\int_0^T EQ(\Lambda(s))ds\}<Ae^{-\alpha T}.$$

此不等式意味着

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^T EQ(\Lambda(s))ds<0.$$

但这与假设 $\alpha=0$ 矛盾！类似地可证明解 $X(t)\equiv 0$ 不满足条件(3.46)。 ▮

二、退化情形

前面我们已研究了系统(3.42)渐近稳定性的条件，但这些条件都是在非退化条件(3.44)下给出的，试问：如果扩散矩阵允许在某条曲线或某个曲面上，或者甚至几乎处处退化，则前面的证明应作如何修正？

首先我们注意到在前面的所有证明中，条件(3.44)是本质之点並不太多，作为(3.44)的一个结果是马氏过程 $\Lambda(t)$ 在球面 $|X|=1$ 的遍历性。现在假设这一性质不成立，並且满足初始条件 $\Lambda^{\lambda_0}(t_0)=\lambda_0$ 的马氏过程：

$$\Lambda^{\lambda_0}(t)=\frac{X^X(t)}{|X^X(t)|},\qquad \left(\lambda_0=\frac{X}{|X|}\right).$$

的轨道，对不同的 λ_0 可属于过程不同的遍历分支 A，並让 $\mathscr{M}_A(d\lambda)$ 记为对于分支 A 的平稳初始分布。

〔注〕(1) 一个非空集 $A\in\mathscr{B}_l$，对于过程 $X(t)$ 是称为不变的，如果 $P(X,t,A)=1$，对于 $X\in A$，$t\geqslant 0$。

集 $B\in\mathscr{B}_l$ 是称为过程 $X(t)$ 的非本质状态集合，如果 $P(X,t,B)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$，对于所有 $X\in E_l$。

(2) 假设整个相空间 E_l 可分解成有限多个或可列多个不变集 A_i 和一个非本质状态集合 $B=E_l\setminus\bigcup_i A_i$ 的并。每集 A_i 是称为过程 $X(t)$ 的遍历集或遍历分支)，如果在每一 A_i 上存在一个平稳分布(或不变概测度) $\mathscr{M}_i(E)$。当然对于一个过程 $X(t)$ 也可存在不可列无穷多个遍历分支，而且单点集也可成为其一个遍历分支。另外，前面的强大数律对每分支 A_i 仍然成立，只要置其中 $v=\mathscr{M}_A$ 即可。

(3) 因为集 A_i 是互不相交的，所以测度 $\mathscr{M}_i$ 是相互奇异的。易证，对于任意使得 $\sum_i k_i=1$ 的正常数 $k_1,k_2,\cdots$，测度 $\mathscr{M}(E)=\sum_i k_i\mathscr{M}_i(E)$ 也是平稳的，反之亦然。(详见 Hasninskii〔8〕p134)

利用对于分支A的强大数律和引理3.18，如同定理3.19的证明，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln|X^x(t)|}{t}=a_A=\int_A Q(\lambda)\mu_A(d\lambda),\qquad \text{a.s.}(\mu_A),$$

其中
$$\lambda=\frac{X}{|X|}.$$

根据定理3.19和3.20的证明，易见对于系统(3.42)是渐近稳定的一个必要条件是对于其所有遍历分支A，都有

$$a_A<0. \tag{3.49}$$

一个充分条件是对于所有$X\in E_{l}$，几乎必然有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln|X^x(t)|}{t}<0.$$

然而正如前面注(2)中所述，过程$\Lambda(t)$可以有无穷多个遍历分支；例如，对于稳定性系统：

$$\frac{dx}{dt}=x,\qquad \frac{dy}{dt}=y$$

的过程$\Lambda(t)$的遍历分支是圆周$x^2+y^2=1$上的所有点。于是自然想到，上面的条件(3.49)似乎包含了无穷多个条件，但正如我们下面就要证明的，过程$\Lambda(t)$至多只能有l个遍历分支A_i，其对应于不同的a_i值，因此数a_A至多只能取l个不同的值。为此我们先来证明一个简单引理，此引理在常微中通常用来研究Ляпунов特征值的性质（见绪论文献[7]，p.328）。

引理3.21 设$X_i(t)\ (i=1,2)$为E_l值函数，使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\ln|X_i(t)|=a_i<\infty,$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\ln|x_1X_1(t)+x_2X_2(t)|\leqslant\max(a_1,a_2).$$

【证明】 为了确定起见，假设$a_1\leqslant a_2$，由设

$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|X_i(t)|=a_i<\infty$，于是对$\forall\varepsilon>0$，$\exists T(\varepsilon)>0$，使当$t>T(\varepsilon)$时，就有$|X_i(t)|<e^{(a_i+\varepsilon)t}$，于是有

$$|x_1X_1(t)+x_2X_2(t)|\leqslant|x_1|e^{(a_1+\varepsilon)t}+|x_2|e^{(a_2+\varepsilon)t}\leqslant ke^{(a_2+\varepsilon)t},$$

从而推得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x_1X_1(t)+x_2X_2(t)|\leqslant a_2. \quad ∎$$

若过程$A(t)$不是遍历的，则下面的引理可用来研究系统(3.42)的稳定性。

引理 3.22 假设存在l个E_l中的线性独立向量λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_l，使得

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Q(A^{\lambda_i}(t))dt<0,\quad a.s.\ (i=1,2,\cdots,l) \tag{3.50}$$

则系统(3.42)是几乎必然渐近稳定的。

【证明】 由(3.47)，引理3.18和(3.50)推得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|X^{\lambda_i}(t)|<0,\quad i=1,2,\cdots,l$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|X^x(t)|\quad (令x=\sum_{i=1}^{l}k_i\lambda_i)$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\sum_{i=1}^{l}k_iX^{\lambda_i}(t)\right|\quad (由引理3.21)$$

$$<0,\quad a.s.\quad ∎$$

推论 3.23 过程$A(t)$至多有l个遍历分支A_i，其对应于不同的$a_i=\int_{A_i}Q(\lambda)\mathscr{U}_i(d\lambda)$的值.这里的$\mathscr{U}_i$为分支$A_i$的平稳分布。

此外，若 $a_1<a_2<\cdots<a_l$，则 $a_l<0$ 是系统(3.42)为几乎必然渐近稳定的一个充分条件。

【证明】 让 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为过程 $\Lambda(t)$ 的遍历分支，不失一般性，假设其对应的 a_i 是单调递增的：$a_1<a_2<\cdots<a_k$，让 $\lambda_i\in E_i(i=1,2,\cdots,k)$。并使得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Q(\Lambda^{\lambda_i}(t))dt=a_i,\ a.s.$$

则向量 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是线性独立的。事实上，假若不然，我们有 $\lambda_i=\sum_{j=1}^{i-1}C_j\lambda_j$，对于某个 $i\leqslant k$，根据线性系统解的性质有

$$X^{\lambda_i}(t)=\sum_{j=1}^{i-1}C_jX^{\lambda_j}(t),$$

因此几乎必然有

$$a_i=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q(\Lambda^{\lambda_i}(s))ds=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|X^{\lambda_i}(t)|$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\sum_{j=1}^{i-1}C_jX^{\lambda_j}(t)\right|\quad(\text{由引理 } 3,21)$$

$$\leqslant\max(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1})=a_{i-1}.$$

这是一个矛盾！因此 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是线性独立的，又因空间是 l 维的，故 k 至多为 l，再由引理 3.22，则引理得证。 ∎

引理 3.22 的另一个推论是：

推论 3.24 如果过程 $\Lambda(t)$ 有一个遍历分支 A，它的平稳分布 $\mathscr{U}_A(d\lambda)$ 不是集中在任一个超平面 $\sum_{i=1}^{l}k_i\lambda_i+k_0=0$ 上，则系统(3.42)是几乎必然渐近稳定的一个充分条件是

$$a=\int_A Q(\lambda)\mathscr{U}_A(d\lambda)<0.$$

三、相空间为 E_2 的情形

现在我们详细地来考察 $l=2$ 的情形。对前述单位圆周上的马氏过程：

$$\Lambda(t)=\frac{X(t)}{|X(t)|}=\left(\frac{x_1(t)}{|X(t)|},\ \frac{x_2(t)}{|X(t)|}\right)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t)).$$

作变换：

$$\lambda_1(t)=\cos\varphi(t),\lambda_2(t)=\sin\varphi(t).$$

令

$$\lambda(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi),$$

$$\hat{\lambda}(\varphi)=\frac{-d\lambda(\varphi)}{d\varphi}=(\sin\varphi,-\cos\varphi).$$

于是，如同前面所述，由系统(3.42)产生的在圆周上的过程$\varphi(t)$是一个马氏过程，并且容易表明：

$$d\varphi(t)=\Phi(\varphi(t))dt+\psi(\varphi(t))dW(t), \tag{3.51}$$

这里 $\psi^2(\varphi)=(A(\lambda,\varphi))\hat{\lambda}(\varphi),\hat{\lambda}(\varphi))=\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r\lambda(\varphi),\hat{\lambda}(\varphi))^2$,

$$\Phi(\varphi)=-(B\lambda(\varphi),\hat{\lambda}(\varphi))+(A(\lambda(\varphi))\lambda(\varphi),\hat{\lambda}(\varphi)).$$

并且$W(t)$是一个具有零均值並使得$EW^2(t)=t$的Wiener过程，故由(3.51)知，$\varphi(t)$为单位圆周上的一个（一维）**扩散过程**。下面我们就来研究此（一维）扩散过程在单位圆周上的运动情况。

1．非退化情形

我们首先假设

$$\Psi^2(\varphi)>0,\quad (0\leqslant\varphi<2\pi). \tag{3.52}$$

此条件相当于前面的非退化条件(3.44)。因此圆周上的扩散过程$\varphi(t)$有唯一的平稳分布且是绝对连续的，并且其密度$\mu(\varphi)$满足向前的Fokker-Planck-Колмогоровъ方程，另外又因它是平稳的，故有

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\varphi^2}(\Psi^2(\varphi)\mu)-\frac{d}{d\varphi}(\Phi(\varphi)\mu)=0, \tag{3.53}$$

方程(3.53)有唯一的一个满足规范化条件

$$\int_0^{2\pi}\mu(\varphi)d\varphi=1 \tag{3.54}$$

和周期性条件

$$\mu(0)=\mu(2\pi) \tag{3.55}$$

的解。易见此解是给定为：

$$\mu(\varphi)=k\left[1+\frac{W(2\pi)-1}{\int_0^{2\pi}W(s)ds}\int_0^{\varphi}W(u)du\right]\left[W(\varphi)\Psi^2(\varphi)\right]^{-1}, \tag{3.56}$$

这里
$$W(\varphi)=\exp\left\{-2\int_0^{\varphi}\frac{\Phi(\nu)d\nu}{\Psi^2(\nu)}\right\}.$$

并且常数 k 是由规范化条件(3.54)确定的。

利用定理 3.19 和 3.20 于情形 $l=2$，我们得到

$$\int_0^{2\pi}Q(\lambda(\varphi))\mu(\varphi)d\varphi<0 \tag{3.57}$$

是一个用积分表示的几乎必然渐近稳定性的充分必要条件。

2. 退化情形

现在去掉非退化条件(3.52)，允许 $\Psi^2(\varphi)$ 可为零。因为

$$\Psi^2(\varphi)=\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r\lambda(\varphi),\hat{\lambda}(\varphi))^2.$$

其中
$$\lambda(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi),\ \hat{\lambda}(\varphi)=(\sin\varphi,-\cos\varphi).$$

故除了确定性系统($\sigma_r=0$) 的平凡情形外，还存在两种可能情形：

(1) $\sin\varphi=0,\quad \cos\varphi=0$;

(2) $\Psi^2(\varphi)=0$等价于关于 $\mathrm{tg}\varphi$或 $\mathrm{ctg}\varphi$的一个四阶方程。

由于 $\Psi^2(\varphi)\geqslant0$，故在这两种情形，方程 $\Psi^2(\varphi)=0$ 在

区间 $0\leqslant\varphi<\pi$ 内至多有两个根，再由 $\operatorname{tg}\varphi$（或 $\operatorname{ctg}\varphi$）的周期性，对每根增加一个 π 后，仍为它的根，于是推得过程 $\varphi(t)$ 至多有 4 个遍历分支，如果 $\sigma_1^2\neq0$。

由一维扩散过程可以知道 $\Psi^2(\varphi)=0$，此时扩散系数消失，这种点 φ 称为过程的**奇异点**。奇异点可分为两类：

(1)套点(trap point)：在这种点 φ 有 $\Psi^2(\varphi)=0$，$\Phi(\varphi)=0$，故套点是过程的平稳点（它既不向左也不向右运动）。

(2)流动点：在这种点处有 $\Psi^2(\varphi)=0$，但 $\Phi(\varphi)\neq0$。此时又有两种可能：

(i)若 $\Phi(\varphi_0)>0$，则 φ_0 称为过程的纯向右的点，此时因 $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\varphi=\varphi_0}=\Phi(\varphi_0)>0$（沿增加方向运动，亦即反时针方向运动）。

(ii)$\Phi(\varphi_0)<0$，则 φ_0 称为纯向左的点，此时因 $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\varphi=\varphi_0}=\Phi(\varphi_0)<0$（沿减少方向即沿顺时针方向运动）。

现在让我们来仔细讨论这些可能性。

(1)让 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1+\pi,\varphi_2+\pi(0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\pi)$ 为 $\Psi^2(\varphi)=0$ 的解。

(i)若 $\operatorname{sign}\Phi(\varphi_1)=\operatorname{sign}\Phi(\varphi_2)$，此时 $\varphi(t)$ 沿着圆周向同一方向不断转动，故此时过程 $\varphi(t)$ 是遍历的。

(ii)若 $\operatorname{sign}\Phi(\varphi_1)=-\operatorname{sign}\Phi(\varphi_2)$，此时 $\varphi(t)$ 从一个点沿顺时针方向转，从另一个点沿反时针方向转，故此时过程 $\varphi(t)$ 有两个遍历分支。

(2)假设方程，$\Psi^2(\varphi)=0$，在区间 $[0,2\pi]$ 中只有两个解 φ_1 和 $\varphi_1+\pi$，则此过程总是遍历的，只要 $\Phi(\varphi_1)\neq0$。

(3)如同时一并有 $\Phi(\varphi_k)=0$，则 φ_k 为套点，所以过程 $\varphi(t)$ 在 $\varphi=\varphi_k$ 和 $\varphi=\varphi_k+\pi$ 有平稳点。

例如考虑系统

$$
\begin{aligned}
dx_1(t) &= ax_1dt + \sigma_1 x_1 dW_1(t), \\
dx_2(t) &= bx_2dt + \sigma_2 x_2 dW_2(t),
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\Psi^2(\varphi) &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\cos^2\varphi \sin^2\varphi, \\
\Phi(\varphi) &= \sin\varphi\cos\varphi(\sigma_1^2\cos^2\varphi - \sigma_2^2\sin^2\varphi - a + b).
\end{aligned}
$$

于是点 $\varphi_k = \dfrac{k\pi}{2}(k=0,1,2,3)$ 均为过程 $\varphi(t)$ 的平稳点，过程 $\varphi(t)$ 的所有不变测度均集中在这些点上（但其对应两个不同的 λ 值），因此推得系统(3.58)是稳定的充分必要条件是它的两个分量都是稳定的。这个结论也可直接导得，因为过程(3.58)的分量是相互独立的。

更实质性的例子，我们将在下面讨论。

四、例　子

在第2章§2.7中，我们已看到一个不稳定的确定性系统：$\dot{x} = bx$ $(b>0)$ 是不能通过"可物理实现"的参数扰动来稳定化的。这一事实首先是由Lebowitz注意到，而且他还猜测在多维情形也有类似的结果，然而下面我们可举出例子，表明在多维情形并非如此。为了下面例子分析的需要，我们先来回顾关于Bessel函数积分表示的一些知识。

1．Bessel函数有关知识的回顾

(1)定义。Bessel函数是Bessel方程

$$
z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0 \tag{3.59}
$$

的解，其中自变量 z 在应用中可取实值或复值，参数 n 一般也为复数。

Bessel 函数也称为柱函数，是由微分方程所引进的一种特殊函数，这种函数在纯粹数学和数学物理中都有重要意义。它们是追加的函数，与初等函数 z^n, $\sin z$, e^z 一样，可用来表示物理现象。

(2) 分类。Bessel 函数可分为第一类 Bessel 函数（或 n 阶Bessel函数），第二类 Bessel 函数(或 Neumann 函数)，第三类 Bessel 函数（或 Hankel 函数）.

(3) Bessel 数的积分表示。

Bessel 函数的下列积分表示式：

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi i^n}\int_0^\pi e^{iz\cos\theta}\cos n\theta d\theta,\quad n\text{ 为整数}\tag{3.60}$$

在实际中是很有用的。在某些应用中，对于变数 z 的 $\arg z$ ($\neq 0$) 取固定值，例如取，$\arg z=\frac{\pi}{2}$，亦即 z 是虚部为正的纯虚数，为了方便起见，此时我们采用特殊的记号。对于正的 x，由下式确定修改的 n 阶 Bessel 函数的积分表示（或纯虚变数的 Bessel 函数的积分表示）：

$$I_n=\exp(-in\pi/2)J_n(ix)=\frac{(-1)}{\pi}\int_0^\pi e^{-x\cos\theta}\cos n\theta d\theta.\tag{3.61}$$

(4) $I_n(x)$ 的渐近性态。

对于 n 为大于或等于零的实值，当 $x\to\infty$ 时，函数 $I_n(x)$ 单调递增到无穷大。

2. 例

现在我们考虑 E_2 中的系统：

$$\begin{aligned}dx_1(t)&=b_1x_1dt+\sigma(x_1d^*W_1(t)+x_2d^*W_2(t)),\\ dx_2(t)&=b_2x_2dt+\sigma(x_1d^*W_1(t)+x_2d^*W_2(t)).\end{aligned}\tag{3.62}$$

这里 $d^*W_i(t)$ 均为 Stratonovič 随机微分.

此过程的微算子，显然是

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+(b_1+\frac{\sigma^2}{2})x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+(b_2+\frac{\sigma^2}{2})x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}(x_1^2+x_2^2)(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}).\quad \text{（见第 2 章的(2.76)式）}$$

因此利用公式(3.56)及 $Q(\lambda)$ 的公式，有

$$\mu(\varphi)=C\exp\left\{\frac{b_1-b_2}{\sigma^2}\cos^2\varphi\right\},$$

$$Q(\lambda(\varphi))=\frac{\sigma^2}{2}+b_1\cos^2\varphi+b_2\sin^2\varphi.$$

利用定理 3.19 和 3.20，可得到条件

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sigma_2}{2}+b_1\cos^2\varphi-b_2\sin^2\varphi)$$

$$\times\exp\{\frac{b_1-b_2}{\sigma^2}\cos^2\varphi\}d\varphi<0 \qquad (3.63)$$

是系统(3.62)为渐近稳定的充分与必要条件.

利用纯虚变数的 Bessel 函数 $I_n(x)$ 的积分表示(3.61)，可将条件(3.63)化为等价的另一种形式. 事实上，如令 $\mathscr{K}=(b_1-b_2)/\sigma^2$，由(3.61)，(3.63)得到条件：

$$1+\frac{2b_1}{\sigma^2}<\mathscr{K}\left(1-\frac{I_1(\frac{\mathscr{K}}{2})}{I_0(\mathscr{K}/2)}\right), \qquad (3.64)$$

它等价于(3.63).

当 $x\to\infty$ 时，函数 $In(x)$ 的渐近性态表明上面的不等式是正确的，只要 $b_2<0$ 且其绝对值充分大，並且 $b_1/\sigma^2<3/8$ 即可.

于是我们已证明了，对于$b_1>0$和适当选择的$b_2<0$，不稳定系统

$$\frac{dx_1}{dt}=b_1x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt}=b_2x_2, \tag{3.65}$$

当它的参数通过某种"物理可行"的白噪声过程扰动时而被变为一个渐近稳定系统。这一结果对于任意通过线性变换可化为典则形式(3.65)的确定性系统都是正确的。事实上，线性变换不影响系统的稳定性质。

*§3.7 n阶线性微分方程的稳定性

我们知道，方程

$$y^{(n)}+b_1y^{(n-1)}+\cdots+b_ny=0 \tag{3.66}$$

的解$y=0$是稳定的，当且仅当**Routh-Hurwitz 条件**

$$\Delta_1=b_1>0; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}>0;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ 1 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}>0;\cdots, \quad \Delta_n=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}>0 \tag{3.67}$$

满足(见秦元勋等[9])。

本节的目的就是要导出系统

$$y^{(n)}+(b_1+\dot{\eta}_1(t))y^{(n-1)}+\cdots+(b_n+\dot{\eta}_n(t))y=0$$

与Routh-Hurwitz条件相类似的必要与充分条件。这里的$\dot{\eta}_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$是Gauss白噪声，一般相关，即

$$E\dot{\eta}_i(s)\dot{\eta}_j(t)=a_{ij}\delta(t-s).$$

一、方程的变形

正如§3.1中所指出的，以独立的白噪声过程来替代过程 $\dot{\eta}_1(t),\cdots,\dot{\eta}_n(t)$，並令

$$x_1(t)=y(t),\ \cdots,\ x_n(t)=y^{(n-1)}(t),$$

则上述 n 阶线性随机系统就化为下面的 Itô 随机系统：

$$\left.\begin{aligned}&dx_1(t)=x_2(t)dt,\\&dx_2(t)=x_3(t)dt,\cdots,dx_{n-1}(t)=x_n(t)dt,\\&dx_n(t)=-\sum_{i=1}^{n}b_ix_{n-i+1}(t)-\sum_{i,j}^{n}\sigma_{ij}x_{n-i+1}dW_j(t)\end{aligned}\right\}\quad(3.68)$$

易见过程 $X(t)$ 的微分算子为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n-1}x_{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n}b_ix_{n-i+1}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x_{n-i+1}x_{n-j+1}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

这里 $(a_{ij})=(\sigma_{ij})(\sigma_{ji})$。

二、均方渐近稳定性条件的讨论

利用 §3.2 与 §3.3 的方法，我们可以决定系统(3.68)是均方稳定的必要与充分条件，然而这样导得的条件包含了 n^2 阶行列式的确定，因而是相当麻烦的，因此我们将采用其他方法，这种方法对我们给出的条件仅包含 $n+1$ 个行列式的计算，並且这些行列式的最大阶数为 n。另外我们还将看到这些行列式的前 n 个行列式是与(3.67)中的行列式相同的，而最后一个是以一个向量来替代 Δ_n 中的第一行，此向量的分量是由某种规则从系数 a_{ij} 计算得到的。

正如我们在§3.2的注(1)中所看到的，对于系统(3.68)是

均方渐近稳定的一个必要条件是"非随机"系统

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \cdots, \frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,$$

$$\frac{dx_n}{dt}=-\sum_{i=1}^{n} b_i x_{n-i+1} \tag{3.69}$$

是渐近稳定的，亦即Routh-Hurwitz条件(3.67)成立。我们知道在这些假设下，存在一个正定二次型$V(X)$，使得

$$L_0 V=\sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}\frac{\partial V}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n} b_i x_{n-i+1}\frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{3.70}$$

即沿系统(3.69)轨道的全导数是等于一个予先指定的负定型$W(X)$。

我们首先假设二次型

$$a(X)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1}$$

是正定的。于是有

引理 3.25 系统(3.68)的平凡解是均方渐近稳定的，当且仅当存在一个正定二次型

$$V(X)=\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

使得

$$L_0 V=-a(X), \quad d_{nn}<1. \tag{3.71}$$

【证明】假设存在一个二次型$V(X)=\sum d_{ij}x_i x_j$满足引理的条件，则由(3.70)和(3.71)，我们有

$$LV=L_0 V+\frac{a(X)}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}=(d_{nn}-1)a(X)<0.$$

故由定理3.5推得，系统(3.68)是均方渐近稳定的。反之，如果系统(3.68)是均方渐近稳定的，则同样由定理3.5推得，存在一个正定二次型

$$V_1(X)=\sum_{i,j=1}^{n}\nu_{ij}x_ix_j$$

使得 $LV_1=-a(X)$，即

$$L_0V_1=LV_1-\frac{a(X)}{2}\cdot\frac{\partial^2V_1}{\partial x_n^2}=-(\nu_{nn}+1)a(X).$$

于是 $V(X)=V_1(X)/(\nu_{nn}+1)$，$d_{nn}=\nu_{nn}/(\nu_{nn}+1)<1$。 ∎

为了得到所需求的条件，我们必须通过系统(3.68)的参数 b_i, a_{ij} 来表示出由(3.71)定义的二次型 $V(X)$ 的系数 d_{nn}。

由定理3.5推得，任何一个满足(3.71)的函数 $V(X)$ 可表为

$$V(X)=\int_0^\infty a(X^X(u))du.$$

这一等式使得我们有可能通过方程(3.69)的基本解组来表示出包括 d_{nn} 的 $V(X)$ 的系数。其次，正如Bede'baev[10]所表明的，我们可通过系数 b_i, a_{ij} 来表示它们。事实上，根据Bede'baev[10]有

$$d_{nn}=\frac{1}{2\Delta_n}\sum_{r=0}^{n-1}q_{nn}^{(r)}\Delta_{1,r+1}. \tag{3.72}$$

这里的 $\Delta_{1,r+1}$ 是上面的 Hurwitz 行列式 Δ_n 的第1行和第 $(r+1)$ 列元素的余子式，並且数 $q_{nn}^{(r)}$ 是通过下式：

$$(-1)^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n}a_{n-i+1,n-j+1}D_{ni}(\lambda)D_{nj}(-\lambda)=\sum_{r=0}^{n-1}q_{nn}^{(r)}\lambda^{2(n-r-1)} \tag{3.73}$$

与型 $a(X)$ 的系数 a_{ij} 相联系的，这里 $D_{nj}(\lambda)$ 是系统(3.68)的行列式

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -\lambda & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1-\lambda\end{vmatrix}$$

的第 n 行与第 j 列元素的余子式。易见

$$D_{n1}(\lambda)D_{n1}(-\lambda)=\lambda^{2n-2}(-1)^{n-1}.$$

因此利用(3.73)我们推得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{2k}\sum_{p+q=2(n-k)}a_{pq}(-1)^{q+1}=\sum_{k=0}^{n-1}q_{nn}^{(n-k-1)}\lambda^{2k},$$

故此

$$q_{nn}^{(n-k-1)}=\sum_{p+q=2(n-k)}a_{pq}(-1)^{q+1}. \tag{3.74}$$

由引理3.25并通过(3.72)和(3.74)推得，如果$a(X)$是一个正定二次型，则系统(3.68)是均方渐近稳定的，当且仅当

$$\Delta_1>0;\quad \Delta_2>0;\ \cdots,\ \Delta_n>0;\quad \Delta_n>\Delta/2, \tag{3.75}$$

这里Δ是行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} & q_{nn}^{(1)} & \cdots & q_{nn}^{(n-1)} \\ 1 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}. \tag{3.76}$$

其仅在它的第1行不同上面的Hurwitz行列式Δ_n。而数$q_{nn}^{(r)}(r=0,1,\cdots,n-1)$是通过公式(3.74)与矩阵$A=(a_{ij})$的元素相联系的。

现在我们来表明：$a(X)>0(X\neq0)$的假设不是本质的。为此，除系统(3.68)外，我们考虑另一个系统：

$$dx_1=x_2dt,\quad dx_2=x_3dt,\ \cdots,\quad dx_{n-1}=x_ndt,$$

$$dx_n=-\sum_{i=1}^{n}b_ix_{n-i+1}dt-\sum_{i,j=1}^{n}x_{n-i+1}\sigma_{ij}dW_j(t)+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}x_jd\tilde{W}_j(t) \tag{3.77}$$

这里$\tilde{W}_1(t),\cdots,\tilde{W}_n(t)$均假设为Wiener过程，其相互独立且独立于$W_1(t),\cdots,W_n(t)$，并且$\varepsilon>0$是一个小参数。

易见，相伴系统(3.77)的微分生成算子是

$$\tilde{L}_\varepsilon=L+\frac{1}{2}\varepsilon^2|X|^2\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

因为二次型 $a_\varepsilon(X)=a(X)+\varepsilon^2|X|^2$ 对任一 $\varepsilon>0$ 是正定的，从而推得系统(3.77)是均方渐近稳定的，当且仅当

$$\Delta_1>0,\quad \Delta_2>0,\cdots,\quad \Delta_n>0;$$

$$\Delta_n>\frac{\Delta_\varepsilon}{2}=\frac{\Delta+\varepsilon^2\Delta_1}{2};\tag{3.78}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1}\\ 1 & b_2 & b_4 & & 0\\ 0 & b_1 & b_3 & & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n\end{vmatrix}.$$

如果 Routh-Hurwitz 条件(3.67)满足，则行列式 Δ_1 是正的.这从满足方程 $L\tilde{V}=-|X|^2$ 的正定型 $\tilde{V}(X)$ 中的 x_n^2 的系数 $\tilde{v}_{nn}=\Delta_1/2\Delta_n$ 这一事实推得，因此

$$\Delta_n>\frac{\Delta}{2}.\tag{3.78}$$

现在我们假设系统(3.68)是均方渐近稳定的，则由§3.2的注(3)知，系统(3.77)对于所有充分小的 $\varepsilon>0$ 也是均方渐近稳定的，因此(3.78)成立.从(3.78)和(3.79)得到(3.75).

现在假设不等式(3.75)满足，则存在一个充分小的 $\varepsilon>0$，对于其，不等式(3.78)成立，亦即对于此 ε，系统(3.77)是均方渐近稳定的，由定理3.5，存在一个正定二次型 $W(X)=\sum_{i,j=1}^{n}w_{ij}x_ix_j$，使得 $L_\varepsilon W$ 是负定的，而且函数 $LW=L_\varepsilon W-\varepsilon^2|X|^2\omega_{nn}$ 也是负定的，再一次利用定理3.5，即知系统(3.68)是均方渐近稳定的。于是，我们已证明了定理3.26.

定理 3.26 系统(3.68)是均方渐近稳定的，当且仅当

(3.75)满足。那里的行列式 Δ 由(3.76)给定，並且 Δ 的第1行中的数 $g_{nn}^{(r)}(r=0,1,\cdots,n-1)$ 由公式(3.74)通过系数 a_{ij} 表示。

注意列入条件(3.75)中的矩阵 A 的元素 a_{ij}，那些使得和 $i+j$ 为偶数的元素 a_{ij} 是有意义的。例如，对于2阶和3阶系统，其均方渐近稳定的必要与充分条件是

$$n=2: \quad b_1>0, \quad b_2>0, \quad 2b_1b_2>a_{11}b_2+a_{22}.$$

$$n=3: \quad b_1>0, \quad b_3>0, \quad b_1b_2>b_3.$$

$$2(b_1b_2-b_3)b_3>a_{11}b_2b_3+a_{33}b_1+b_3(a_{22}-2a_{13}).$$

如果叠加在方程(3.66)系数 b_i 上的白噪声过程 $\dot{\eta}_1,\cdots,\dot{\eta}_n$ 是独立的，即相关矩阵 A 的元素 $a_{ij}=0$，对于 $i\neq j$，则行列式 Δ 取特别简单的形式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{22} & \cdots & (-1)^{n-1}a_{n-1,n-1} & a_{nn} \\ 1 & b_2 & & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix}$$

三、渐近 p 稳定性条件的讨论

当 $p\leqslant 2$ 时，条件(3.74)，(3.75) 和 (3.76) 对于系统(3.68)的渐近 p 稳定性均为充分的。

现在我们来讨论当 $p>2$ 时，系统(3.68)渐近 p 稳定性的充分条件，我们首先假设二次型是正定的。

当 $p=2$ 时，因而也是 $p>2$ 时，渐近 p 稳定性的一个必要条件是存在一个正定二次型：

$$V(X)=\sum_{i,j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j$$

满足方程(3.71)。令$W(X)=[V(X)]^{p/2}$，易见

$$LW=\frac{p}{2}V^{\frac{p}{2}-2}\Big\{VL_0V+a(X)[d_{nn}V+(p-2)$$

$$\times\Big(\sum_{j=1}^{n}d_{nj}x_j\Big)^2]\Big\}=\frac{p}{2}V^{\frac{p}{2}-2}a(X)[(d_{nn}-1)V$$

$$+(P-2)\Big(\sum_{j=1}^{n}d_{nj}x_j\Big)^2]. \tag{3.80}$$

由熟知的关于正定自伴矩阵 D 的不等式（例如 Gelfand[11]）有

$$(DX,Y)^2\leqslant(DX,X)(DY,Y).$$

通过取 $Y=(0,\cdots,0,1)$，我们得到

$$\Big[\sum_{j=1}^{n}d_{nj}x_j\Big]^2\leqslant d_{nn}V(X).$$

利用此关系式，从(3.80)我们得到

$$LW\leqslant\frac{p}{2}V^{\frac{p}{2}-1}a(X)[d_{nn}(p-1)-1].$$

如果$d_{nn}(p-1)>1$，则由定理 3.4 推得，系统 (3.68) 是渐近 p 稳定的。于是系统(3.68)是渐近 p 稳定的($p\geqslant2$)的一个充分条件是下列不等式成立：

$$\varDelta_1>0;\ \cdots;\ \varDelta_n>0;\ \varDelta_n>\frac{p-1}{2}. \tag{3.81}$$

前 n 个不等式也是必要的。

条件$\varDelta_n>\frac{p-1}{2}$不是必要的，这一点是可以用一个例子来说明的，但由于篇幅关系，我们就不在此列举了。也容易看出，条件(3.81)对于渐近 p 稳定性 ($p\geqslant2$) 已经是充分的，因此并没有必要去假设二次型 $a(X)$ 是非奇异的。

参 考 文 献

1 Hinčin, A.Ja. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung . Springer , Berlin , (1933), Russian transl. ONTI , Moscow , (1936).

2 Friedman, A. Stochastic differential equations and Applications . vol.I. Academic Press . New York (1975)

3 Leibowitz, M.A. (见第二章文献［20］).

4 Gihman, I.I. (见第二章文献［21］).

5 Nevelson, M.B. and Hasminskii, R.Z. Stability of stochastic systems . Problemy Peredači Informacii 2 (1966) VYP. 3. 76–91 = Problems of Information Transmission 2 (1966) no.3 ,61–74 . MR.34#7233 .

6 Četaev ,N.G. Stability of motion . 3rd edn. "Nauka" Moscow ,(1965), English transl. of 2nd edn. Pergamon Press, Oxford ,(1961), MR.32#4334,42#6370 .

7 Kac, I.Ja. and Krasovskii, N.N. On stability of systems with random parameters , Prikl. Mat. Meh .24 (1960) 809–823 = J. Appl. Math. Mech. 24 (1960) 1225–1246 .

8 Hasminskii, R.Z., (见第一章文献［1］).

9 秦元勋王慕秋王联，运动稳定性理论与应用，科学出版社（1981）.

10 Badelbaev, A.K. On the structure of ljapunov functions which are quadratic forms and their application to the stability of control systems . Avtomatika (Kiev) 1 (1958) 37–43 (Ukrainian) RZ.Mat. 1960#6472 .

11 Gelfand, I.M. Lectures on linear algebra . 2nd edn. GITTL . Moscow ,(1951) . (中译本：盖尔冯德：线性代数学，高等教育出版社（1957））.

引　言

考虑基本微分系统

$$\frac{dX}{dt}=f(X,t), \tag{0.1}$$

其中 $f(X,t)$ 在 $E=E_l\times I$ 上满足一般的假设，且 $f(0,t)\equiv 0$ $(t\in I)$，即系统(0.1)有平凡解 $X\equiv 0$。

此外，考虑纯量辅助系统

$$u'=g(u,t), \tag{0.2}$$

其中 $g\in C[E_1^+\times I,E_1^+]$，(这里 $E_1^+=[0,\infty)$，$C[U,G]$为 $U\to G$ 的连续函数类)并且 $g(0,t)\equiv 0$ $(t\in I)$，即方程有平凡解 $u\equiv 0$。

如果已知辅助系统(0.2)的平凡解具有某种稳定性态，试问：在(0.1)与(0.2)之间，应具有何种联系，才能使系统(0.1)的平凡解也具有同 $u\equiv 0$ 一样的稳定性态呢？关于这一问题的研究在确定性的常微分方程稳定性理论中已有相当完满的结果(见 Lakshmikantham 与 Leela[1])。这种通过在(0.1)与(0.2)之间建立的某种联系，使平凡解的稳定性态由辅助系统过渡到基本系统的方法，就是所谓一般常微方程稳定性理论中的**比较方法**(或称为**比较原理**)。

本篇介绍近十年来，比较方法在随机微分系统中的推广与应用所得到的主要结果。

4

一般随机微分方程的稳定性

§4.1 微分不等式与比较定理

一、纯量微分不等式与比较定理

下面我们将采用 **Dini 导数**的概念。

$$D^+u(t)=\limsup_{h\to 0^+}h^{-1}[u(t+h)-u(t)],$$

$$D_+u(t)=\liminf_{h\to 0^+}h^{-1}[u(t+h)-u(t)],$$

$$D^-u(t)=\limsup_{h\to 0^-}h^{-1}[u(t+h)-u(t)],$$

$$D_-u(t)=\liminf_{h\to 0^-}h^{-1}[u(t+h)-u(t)].$$

这里 $u\in C[[t_0,t_0+a),E_1]$。当 $D^+u(t)=D_+u(t)$ 时，右导数记为 $u'_+(t)$，类似地，当 $D^-u(t)=D_-u(t)$ 时，左导数记为 $u'_-(t)$。

定理4.1 假设

(i) G 为 $E_1\times I$ 中的一个开的 (u,t) 集，且 $g\in C[G,E_1]$。

(ii) $v,w\in C[[t_0,t_0+a),E_1]$ 且 $(v(t),t)\in G$，$(w(t),t)\in G$，对于 $t\in[t_0,t_0+a)$。

(iii) $v(t_0)<w(t_0)$。 (4.1)

(iv) 对于 $t\in(t_0,t_0+a)$ 有不等式：

$$D_-v(t)\leqslant g(v(t),t),\quad D_-w(t)>g(w(t),t). \tag{4.2}$$

则

$$v(t)<w(t),\quad t\in[t_0,t_0+a). \tag{4.3}$$

【证明】 假若(4.3)式不成立，则集

$$Z=\{t: t\in[t_0,t_0+a)\text{且}w(t)\leqslant v(t)\}$$

非空。定义 $t_1=\inf Z$，由(4.1)显然 $t_0<t_1$，进而

$$v(t_1)=w(t_1). \tag{4.4}$$

且

$$v(t)<w(t);\ t\in[t_0,t_1). \tag{4.5}$$

利用(4.4)与(4.5)，对于充分小的 $h<0$，我们有

$$\frac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h}>\frac{w(t_1+h)-w(t_1)}{h},$$

从而有

$$D_-v(t_1)\geqslant D_-w(t_1). \tag{4.6}$$

由不等式(4.2)，(4.6)並结合(4.4)导致矛盾：

$$g(v(t_1),t_1)>g(w(t_1),t_1).$$

因此，Z 是空集，从而结论(4.3)得证。■

〔注〕由证明，显然不等式(4.2)也可由

$$D_-v(t)<g(v(t),t),D_-w(t)\geqslant g(w(t),t)$$

来替代。

下面的引理虽然是对于纯量函数的，但容易看出对于向量函数也是正确的。

让 S 记为 $[t_0,t_0+a)$ 的至多为可数的一个子集。

引理4.2(Zygmund). 假设 $u\in C[[t_0,t_0+a),E_1]$ 且有不等式 $Du(t)\leqslant 0$，对于 $t\in[t_0,t_0+a)-S$，D 是某一固定的 Dini 导数。则 $u(t)$ 在 $[t_0,t_0+a)$ 上关于 t 非增。

引理4.3 设 $v,w\in C[[t_0,t_0+a),E_1]$ 並且对于某固定的 Dini 导数，有

$$Dv(t)\leqslant w(t),\text{对于 } t\in[t_0,t_0+a)-S.$$

则

$$D_-v(t)\leqslant w(t),\text{对于 } t\in[t_0,t_0+a).$$

【证明】 定义函数

$$m(t)=v(t)-\int_{t_0}^{t}w(s)ds.$$

则由假设得到

$$Dm(t)=Dv(t)-w(t)\leqslant 0, t\in[t_0,t_0+a)-S.$$

因此由引理4.2知，$m(t)$在$[t_0,t_0+a)$上关于t是非增的，故此，$D_-m(t)=D_-v(t)-w(t)\leqslant 0, t\in[t_0,t_0+a)$. ∎

〔注〕 由引理4.3，显然定理4.1中的不等式(4.2)是对于 $t\in[t_0, t_0+a)$ 一成立且 D 为任一固定的Dini导数时，结论仍然正确.

考虑纯量方程

$$u'=g(u,t), u(t_0)=u_0. \tag{4.7}$$

$$u'=g(u,t)+\varepsilon, u(t_0)=u_0+\varepsilon. \tag{4.8}$$

这里 $g\in C[G,E_1]$.

我们假设方程(4.7)满足 Peano 存在定理的条件且存在最大解和最小解，而且此最大解和最小解可以延拓到G的边界.

引理4.4 设$[t_0,t_0+a)$为(4.7)的最大解$r(t)$存在的区间，且设$[t_0,t_1]$为$[t_0,t_0+a)$的任一紧子区间，则存在一个$\varepsilon_0>0$，使得对于$0<\varepsilon<\varepsilon_0$，方程(4.8)的最大解$r(t,\varepsilon)$存在于$[t_0,t_1]$上，并且在$[t_0,t_1]$上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}r(t,\varepsilon)=r(t).$$

此引理的证明略去，有兴趣的读者可参考Lakshmikantham与 Leela[1]p13.

定理4.5 （比较定理） 设

(i) $g\in C[G,E_1]$，$[t_0,t_0+a)$为(4.7)的最大解$r(t)$存在的最大区间.

(ii) $m\in C[(t_0,t_0+a),E_1]$且$(m(t),t)\in G$，对于

$t \in [t_0, t_0+a)$.

(iii) $m(t_0) \leqslant u_0$，且对于某固定的 Dini 导数有

$$Dm(t) \leqslant g(m(t), t), \quad t \in [t_0, t_0+a) - S. \tag{4.9}$$

则

$$m(t) \leqslant r(t), \quad t \in [t_0, t_0+a), \tag{4.10}$$

【证明】 由引理(4.3)及(4.9)式，我们有

$$D_-m(t) \leqslant g(m(t), t), t \in [t_0, t_0+a). \tag{4.11}$$

让 $t_0 < \tau < t_0 + a$，由引理4.4，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，(4.8)的最大解 $r(t, \varepsilon)$ 存在于$[t_0, \tau]$上，並且在$[t_0, \tau]$上一致地有

$$r(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(t, \varepsilon). \tag{4.12}$$

则由条件(iii)及(4.8)，我们有 $m(t_0) \leqslant u_0 < u_0 + \varepsilon$.

$$r'(t, \varepsilon) = g(r(t, \varepsilon), t) + \varepsilon > g(r(t, \varepsilon), t), t \in [t_0, \tau].$$

$$D_-m(t) \leqslant g(m(t), t), t \in [t_0, t_0+a).$$

从而由定理4.1，有

$$m(t) < r(t, \varepsilon), t \in [t_0, \tau].$$

由上面的不等式及(4.12)，即证得

$$m(t) \leqslant r(t), t \in [t_0, t_0+a]. \quad ▮$$

〔注〕 如果不等式(4.9)反向且 $m(t_0) \geqslant u_0$，则我们可以 $m(t) \geqslant \rho(t)$ 来替代上面的結论.（这里$\rho(t)$ 为(4.7)的最小解）.

二、向量微分不等式与比较定理

现在我们将微分不等式推广到微分不等式组的情形. 设

指标 i 取值范围为整数 $1, 2, \cdots, l$.

指标 p 取值范围为整数 $1, 2, \cdots, k$.

指标 q 取值范围为整数 $k+1, k+2, \cdots, l$.

$$0 \leqslant k \leqslant l.$$

向量不等式定义如下：

$$(a_1, \cdots, a_l) \geqslant (b_1, \cdots, b_l) \triangleq \{a_i \geqslant b_i, i=1,2,\cdots,l\}$$

考虑微分系统

$$\frac{du}{dt} = g(u,t), u(t_0) = u_0. \tag{4.13}$$

这里 $g \in C[G, E_l]$，并且 G 是 $E = E_l \times I$ 中的一个开的 (u,t) 集。

在向量情形，我们要求函数 $g(u,t)$ 具有一定的单调性质。

定义4.1（函数的混合拟单调性）。函数 $g(u,t)$ 是称为具有**混合拟单调性质**的，如果下面的条件成立：

(i) $g_p(u,t)$ 关于 u_j 是非降的，$j=1,2,\cdots,k, j \neq p$，并且关于 u_q 是非增的。

(ii) $g_q(u,t)$ 关于 u_p 是非增的，并且关于 u_j 是非降的，$j=k+1,k+2,\cdots,l, j \neq q$。

〔注〕 特殊情形：

(1) 当 $k=l$ 和 $k=0$ 时，函数 $g(u,t)$ 的混合拟单调性质分别对应于函数 $g(u,t)$ 的拟单调非降和拟单调非增的性质。

(2) 如果在定义4.1的条件(i)和(ii)中不要求 $j \neq p$，$j \neq q$，则函数 $g(u,t)$ 是称为具有混合单调性质。

对应于纯量微分不等式定理4.1，我们有下面的向量微分不等式定理。

定理 4.6 设

(i) $g \in C[G, E_l]$，

(ii) $v, w \in C[[t_0, t_0+a), E_l]$，$(v(t),t)$，$(w(t),t) \in G$，

$$t \in [t_0, t_0+a),$$

(iii) $g(u,t)$ 具有混合拟单调性质。

(iv) $v_p(t_0) < w_p(t_0)$，$v_q(t_0) > w_q(t_0)$。 (4.14)

并且对于 $t\in(t_0,t_0+a)$ 有不等式：

$$D_-v_p(t)\leqslant g_p(v(t),t). \tag{4.15}$$

$$D_-v_q(t)>g_q(v(t),t). \tag{4.16}$$

$$D_-w_p(t)>g_p(w(t),t). \tag{4.17}$$

$$D_-w_q(t)\leqslant g_q(w(t),t). \tag{4.18}$$

则

$$v_p(t)<w_p(t),v_q(t)>w_q(t),t\in[t_0,t_0+a). \tag{4.19}$$

【证明】 定义

$$m_p(t)=w_p(t)-v_p(t),$$

$$m_q(t)=v_q(t)-w_q(t).$$

则因(4.14)式，我们有

$$m_i(t_0)>0,\quad i=1,2,\cdots,l \tag{4.20}$$

假若结论(4.19)不正确，则集

$$Z=\bigcup_{i=1}^{l}\{t:t\in[t_0,t_0+a)\text{且 }m_i(t)\leqslant 0\}$$

非空。让 $t_1=\inf Z$，由(4.20)显然 $t_1>t_0$，因为集 Z 是闭的，所以 $t_1\in Z$，因此至少存在一个 j 使得

$$m_j(t_1)=0. \tag{4.21}$$

因为假若不然，(4.21)不成立，则应有 $m_j(t_1)<0$，而由连续性其在 t_1 左边充分小的邻域内有 $m_j(t)<0$，这与 t_1 的定义矛盾，从而(4.21)式必成立，同时

$$m_i(t_1)\geqslant 0,i\neq j. \tag{4.22}$$

且

$$D_-m_j(t_1)\leqslant 0. \tag{4.23}$$

假设 $1\leqslant j\leqslant k$，则由(4.23),(4.15),(4.17)，有

$$g_j(w(t_1),t_1)<g_j(v(t_1),t_1). \tag{4.24}$$

然而，另方面由于(4.21)和(4.22)及定理的条件(iii)的

$g(u,t)$关于u的混合拟单调性，我们有

$$g_j(v(t_1),t_1)\leqslant g_j(w(t_1),t_1), \tag{4.25}$$

不等式(4.24)与(4.25)导致矛盾！

如果$k+1\leqslant j\leqslant l$，如同前面的证明可得

$$g_j(w(t_1),t_1)>g_j(w(t_1),t_1).$$

这只要利用(4.16)，(4.18)，(4.21)，(4.22)，(4.23)和函数$g(u,t)$关于u的混合拟单调性质即得。因此，集合Z是空的，从而证明了(4.19)式。∎

推论4.7 定理4.6的条件(i)，(ii)和(iii)满足，且

(iv) $v(t_0)<w(t_0)$并且对于$t\in(t_0,t_0+a)$有不等式：

$$D_-v(t)\leqslant g(v(t),t), D_-w(t)>g(w(t),t).$$

则有

$$v(t)<w(t), t\in[t_0,t_0+a).$$

〔注〕 在定理以及其推论中，我们可利用任一固定的Dini导数D来替代D_-，而对应的不等式仅对于$t\in[t_0, t_0+a)-S$成立，结论仍然成立。

定义4.2 让$r(t)$为微分系统(4.7)在$[t_0,t_0+a)$上的一个解，其使得对(4.7)在$[t_0,t_0+a)$上的每一解$u(t)$满足不等式

$$u_p(t)\leqslant r_p(t), u_q(t)\geqslant r_q(t), t\in[t_0,t_0+a). \tag{4.26}$$

或者

$$u_p(t)\geqslant r_p(t), u_q(t)\leqslant r_q(t), t\in[t_0,t_0+a). \tag{4.27}$$

在(4.26)情形下，称$r(t)$为(4.7)的k大$(l-k)$小的解，反之，在情形(4.27)下，称$r(t)$为(4.7)的k小$(l-k)$大的解。在这二种情形，统称$r(t)$为(4.7)的最小最大解。特别当$k=l$时，一个k大$(l-k)$小解化为一个最大解。当$k=0$时，一个k大$(l-k)$小解化为一个最小解。类似地，当$k=l$和

$k=0$ 时，一个 k 小 $(l-k)$ 大解分别与最小解与最大重解合。

在类似于 Peano 存在定理的条件下，(4.7)的最小最大解是存在的並且可延拓到 G 的边界。

引理4.8 让 $[t_0, t_0+a)$ 为(4.7)的 k 大 $(l-k)$ 小解 $r(t)$ 存在的最大区间，假设 $[t_0, t_1]$ 为 $[t_0, t_0+a)$ 的任一紧子区间，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，系统：

$$\left.\begin{aligned} u_p' &= g_p(u,t)+\varepsilon, u_p(t_0)=u_{0p}+\varepsilon. \\ u_q' &= g_q(u,t)-\varepsilon, u_q(t_0)=u_{0q}-\varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (4.28)$$

在 $[t_0, t_1]$ 上的 k 大 $(l-k)$ 小解 $r(t,\varepsilon)$ 存在並且在 $[t_0, t_1]$ 上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon)=r(t).$$

定理4.9（比较定理） 设

(i) $g\in C[G, E_l]$，

(ii) $g(u,t)$ 具有混合拟单调性质，

(iii) $[t_0, t_0+a)$ 为(4.7)的 k 大 $(l-k)$ 小解 $r(t)$ 存在的最大区间，$m(t)\in C[[t_0, t_0+a), E_l]$，$(m(t);t)\in G$，$t\in[t_0, t_0+a)$。

(iv) $m_p(t_0)\leqslant u_{0p}$，$m_q(t_0)\geqslant u_{0q}$。 (4.29)

並且对任一固定的 Dini 导数有不等式：

$$\left.\begin{aligned} Dm_p(t) &\leqslant g_p(m(t),t) \\ Dm_q(t) &\geqslant g_q(m(t),t) \end{aligned}\right\} t\in[t_0, t_0+a)-S \quad (4.30)$$

则

$$m_p(t)\leqslant r_p(t), m_q(t)\geqslant r_q(t), t\in[t_0, t_0+a) \quad (4.31)$$

【证明】 由引理 4.3 知，不等式(4.30)等价于不等式：

$$\left.\begin{aligned} D_-m_p(t) &\leqslant g_p(m(t),t) \\ D_-m_q(t) &\geqslant g_q(m(t),t) \end{aligned}\right\} \quad t\in[t_0, t_0+a) \quad (4.32)$$

让 $\tau\in(t_0,t_0+a)$，则由引理 4.8 知在 $[t_0,\tau]$ 上，对于所有充分小的 $\varepsilon>0$，存在(4.28)的 k 大 $(l-k)$ 小的解 $r(t,\varepsilon)$，且在 $[t_0,\tau]$ 上一致地有

$$r(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon). \qquad (4.33)$$

由定理 4.6 和关系式(4.28)，(4.32)我们有

$$m_p(t)<r_p(t,\varepsilon),\ m_q(t)>r_q(t,\varepsilon),\ t\in[t_0,\tau]. \qquad (4.34)$$

由上面的不等式及(4.33)式，即得结论(4.31)。∎

〔注〕 在定理 4.9 中，如果不等式(4.29)，(4.30)均反向，则结论(4.31)变为：

$$m_p(t)\geqslant\rho_p(t),\ m_q(t)\leqslant\rho_q(t),\ t\in[t_0,t_0+a),$$

这里 $\rho(t)$ 为(4.7)的 k 小 $(l-k)$ 大解。

定理 4.9 的下面推论，在以后的应用中是十分重要的。

推论4.10 假设

(i) $g\in C[G,E_l]$.

(ii) $g(u,t)$ 关于 u 拟单调非降；

(iii) $[t_0,t_0+a)$ 为(4.7)的最大解 $r(t)$ 存在的最大区间，$m(t)\in C[[t_0,t_0+a),E_l]$，$(m(t),t)\in G$，$t\in[t_0,t_0+a)$.

(iv) 对任一固定的 Dini 导数有不等式：

$$Dm(t)\leqslant g(m(t),t),\ t\in[t_0,t_0+a)-S. \qquad (4.35)$$

则由

$$m(t_0)\leqslant u_0, \qquad (4.36)$$

就有

$$m(t)\leqslant r(t),\ t\in[t_0,t_0+a). \qquad (4.37)$$

〔注〕如果在推论中，不等式(4.35)和(4.36)反向，则结论4.37变为

$$m(t)\geqslant\rho(t),\ t\in[t_0,t_0+a).$$

这里 $\rho(t)$ 是(4.7)的最小解。

§4.2 随机微分不等式与随机比较定理

记 $U(Z,\rho)$ 为 E_l 中以 Z 为球心 ρ 为半径的球。$\bar{U}(Z,\rho)$ 为 $U(Z,\rho)$ 的闭包。

另外，以后所出现的诸如随机变量、随机函数、随机方程、不等式等等关系式均假设是以概率1成立的。

一般具有各种随机因素影响的物理、生物、经济和社会的系统是由下面类型的初值问题来描述的：

$$\frac{dX}{dt}=f(X,t,\omega), \qquad X(t_0,\omega)=X_0(\omega). \quad (4.38)$$

这里 f 为定义在 $U(Z,\rho)\times E_1$ 上的 E_l 值可测随机函数。

这种最一般的随机微分方程类型的特例，即为第1章所讨论的方程(1.23)。

一、关于解的存在性与延拓性

定义4.3 过程 $X(t)$ 是称为初值问题(4.38)在区间 $J=[t_0,t_0+a]$ 上的一个解过程，如果它满足下列条件：

(i) $X(t_0)=X_0$.

(ii) $X(t)$ 以概率1连续.

(iii) $X(t)$ 是一个可测过程.

(iv) 以概率1满足方程

$$\frac{dX}{dt}=f(X,t,\omega), \text{对于 } t\in J.$$

设 f 为定义在 $\bar{U}(Z,\rho)\times J$ 上的 E_l 值可测随机函数，并且只要 $X(t)$ 以概率1连续，则假设 $f(X(t),t,\omega)$ 在 J 上可积。

于是初值问题(4.38)等价于积分方程

$$X(t,\omega)=X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}f(X(s,\omega),s,\omega)ds. \tag{4.39}$$

定理4.11(Caratheodory 存在定理) 假设

(i) f 为定义在 $\overline{U}(Z,\rho)\times J$ 上的 E_l 值可测随机函数，并且 $f(X,t,\omega)$ 对每一 $t\in J$ 关于 X, a.s. 连续.

(ii) $0\leqslant K(t,\omega)\in L, t\in J$, 并且满足

$$|f(X,t,\omega)|\leqslant K(t,\omega),(X,t)\in\overline{U}(Z,\rho)\times J. \tag{4.40}$$

(iii) $X_0\in\overline{U}(Z,\rho/2)$, ρ 为一正数。

则初值问题(4.38)，对某个 $b>0$, 在 $[t_0,t_0+b]$ 上至少有一个解：$X(t)=X(t,X_0,t_0)$.

由于该定理的证明冗长，这里从略了。有兴趣的读者可查阅 Ladde 与 Lakshmikantham[2] 的定理2.2.1。

该定理的下列推论，在实际中是十分有用的。

推论4.12 让 D 为 E_l 中的一个开集，并且 $G=D\times J$。让 G_0 为 G 的一个紧子集。假设 f 为定义在 G 上的 E_l 值可测随机函数，并且 $f(X,t,\omega)$ 对每一 t 关于 X, a.s. 连续，设

$$0\leqslant K(t,\omega)\in L, t\in J,$$

且有

$$|f(X,t,\omega)|\leqslant K(t,\omega),(X,t)\in G_0, a.s.$$

则存在一个正数 b，使得如果 $(X_0,t_0)\in G_0$, (4.38)在 $[t_0,t_0+b]$ 上有一个解过程 $X(t)$，并且对于所有 $t\in[t_0,t_0+b]$, a.s. 有 $X(t)\in G_0$。

定理4.13(解的延拓定理) 假设

(i) f 为定义在 G 上的 E_l 值可测随机函数，并且对每一 t, $f(X,t,\omega)$ 关于 X, a.s. 连续.

(ii) 设 $0\leqslant K(t,\omega)\in L, t\in J$. 并且

$$|f(X,t,\omega)|\leqslant K(t,\omega),\ a.s.\quad 对于(X,t)\in G_0.$$

这里 G_0 为 G 的任一紧子集。

(iii)让 $X(t)$ 为(4.38)在某区间$[t_0,b_0]$上的一个解过程，并且有$(\lim\limits_{t\to b_0^-}X(t),b_0)\in G_0$，$a.s.$

则此解过程可延拓到b_0的右边，进而它可延拓到G的边界。

【证明】 因为$(\lim\limits_{t\to b_0^-}X(t),b_0)\in G_0$，由定理 4.11 的推论知，对某个 $b>0$，在$[b_0,b_0+b]$上存在一个过点$(\lim\limits_{t\to b_0^-}X(t),b_0)$的解 $\hat{X}(t)$。定义 $Y(t)$ 如下：

$$Y(t)\triangleq\begin{cases}X(t), 对于\ t\in[t_0,b_0].\\ \hat{X}(t), 对于\ t\in[t_0,b_0+b].\end{cases}$$

则 $Y(t)$ 是$[t_0,b_0+b]$上的一个解，并且 $Y(t_0)=X_0$。此定理的后一部分证明，类似于Lakshmikantham 与 Leela[1]的定理 1.1.3 的证明。∎

二、随机微分不等式

现在我们将§4.1的结果推广到随机情形。类似于§4.1，我们首先来引进随机函数的 Dini 导数概念。

让 $X(t,\omega)$ 为定义在$[a,b]$上的 $a.s.$ 连续的 E_l 值可分随机过程。于是对于固定的 $t\in[a,b]$，$t+h\in[a,b]$且 $h\neq0$ 为一小的数，显然 $h^{-1}[X(t+h,\omega)-X(t,\omega)]$关于 h 是可分的且以概率 1 连续，从而推得

$$\begin{aligned}&\limsup_{h_n\to0^\pm}h_n^{-1}[X(t+h_n,\omega)-X(t,\omega)]\\&\qquad=\limsup_{h\to0^\pm}h^{-1}[X(t+h,\omega)-X(t,\omega)]\\&\qquad=D^\pm X(t,\omega)\end{aligned}$$

$$\liminf_{h_n\to 0\pm} h_n^{-1}[X(t+h_n,\omega)-X(t,\omega)]$$
$$=\liminf_{h\to 0\pm} h^{-1}[X(t+h,\omega)-X(t,\omega)]$$
$$=D_{\pm}X(t,\omega).$$

以概率1存在。

定理4.14 假设

(H_1). g为定义在$D\times[t_0,t_0+a)$上的E_l值可测随机函数，$g(u,t,\omega)$对每一t关于u为$a.s.$拟单调非降的。D为E_l中的一开集且$a>0$。

(H_2). u,v为定义在$[t_0,t_0+a)$上$a.s.$连续的E_l值可分随机过程，并且对于$(u(t,\omega),t),(v(t,\omega),t)\in D\times[t_0,t_0+a)$，有

$$D_-v(t,\omega)\leqslant g(v(t,\omega),t,\omega).$$

并且

$D_-u(t,\omega)>g(u(t,\omega),t,\omega)$，对于$t\in[t_0,t_0+a)-S$.

(H_3). $v(t_0,\omega)<u(t_0,\omega)$.

则

$$v(t,\omega)<u(t,\omega)\text{，对于}t\in[t_0,t_0+a). \tag{4.41}$$

该定理即为§4.1定理4.6推论的推广，其证明的思想方法亦完全类似。

【证明】 假设(4.41)不成立，则不失一般性，存在$t_1>t_0$和一个指标j以及$\Omega_j\subset\Omega$，使得

(i) $u_j(t_1,\omega)=v_j(t_1,\omega),\omega\in\Omega_j$ 且 $P(\Omega_j)>0$.

(ii) $u_j(t,\omega)>v_j(t,\omega),t\in[t_0,t_1)$, $a.s.$

(iii) $u_i(t_1,\omega)\geqslant v_i(t_1,\omega),\omega\in\Omega_j,i\neq j$.

(iv) 假设(H_2)成立，对于(t_1,ω).

这里$\omega\in(\Omega_j\setminus N)$并且$N\subset\Omega_j$为任一零测集。

对于 $\omega\in\Omega_j$ 和小的 $h<0$，我们有

$$h^{-1}[u_j(t_1+h,\omega)-u_j(t_1,\omega)]<h^{-1}[v_j(t_1+h,\omega)-v_j(t_1,\omega)].$$

其意味着

$$D_-u_j(t_1,\omega)\leqslant D_-v_j(t_1,\omega).$$

由此和(H_2)，对于 $\omega\in\Omega$，得

$$g_j(u(t_1,\omega),t_1,\omega)<g_j(v(t_1,\omega),t_1,\omega).\tag{4.42}$$

另方面，由(H_1)及(i)—(iv)我们有

$$g_j(v(t_1,\omega),t_1,\omega)\leqslant g_j(u(t_1,\omega),t_1,\omega),\quad 对于\ \omega\in\Omega_j.$$

由此及(4.42)导致矛盾：

$$g_j(u(t_1,\omega),t_1,\omega)<g_j(u(t_1,\omega),t_1,\omega),对于\ \omega\in\Omega_j.$$

从而 $P(\Omega_j)=0$，並且这种 t_1 不存在。 ∎

〔注〕 由证明，显然假设(H_2)中的不等式也可替换为

$$D_-v(t,\omega)<g(v(t,\omega),\ t,\omega)$$

且

$$D_-u(t,\omega)\geqslant g(u(t,\omega),\ t,\omega),t\in[t_0,t_0+a)-S.$$

我们注意定理的证明，不要求对所有的$(t,\omega)\in[t_0,t_0+a)\times\Omega$，假设($H_2$)中的不等式成立。事实上，只要假设不等式：

$$D_-v_j(t,\omega)\leqslant g_j(v(t,\omega),t,\omega)$$

$$D_-u_j(t,\omega)>g_j(u(t,\omega),t,\omega)$$

对于$t\in\{t:u_j(t,\omega)=v_j(t,\omega)\}$和 $\omega\in\Omega_j(t)=\{\omega:u_j(t,\omega)=v_j(t,\omega)\}$ 且 $P(\Omega_j)>0$，$1\leqslant j\leqslant l$ 均满足即可。

通过关于 $g(u,t,\omega)$ 的单边估计的假设，假设(H_2)可以放宽，並且可以建立如下较弱的不等式。

定理4.15 假设条件(H_1)保持，进而假设上定理中的 u,v，对于$(u(t,\omega),t),(v(t,\omega),t)\in D\times[t_0,t_0+a)$有

$$D_-v(t,\omega)\leqslant g(v(t,\omega),t,\omega).$$

並且

$$D_-u(t,\omega)\geqslant g(u(t,\omega),t,\omega),对于\ t\in[t_0,t_0+a)-S.$$

此外 g 满足单边估计：

$$g(X,t,\omega)-g(Y,t,\omega)\leqslant K(t,\omega)(X-Y), \qquad (4.43)$$
对于 $X,Y\in D$ 且 $X>Y$.

其中 $K(t,\omega)$ 为定义在$[t_0,t_0+a)$上的 R^{l^2} 值的可测随机函数且 $K\in L$。则由

$$v(t_0,\omega)\leqslant u(t_0,\omega)$$

就有

$$v(t,\omega)\leqslant u(t,\omega), 对于 t\in[t_0,t_0+a).$$

【证明】 置 $W=u+\exp[2\int_{t_0}^{t}K(s,\omega)ds]\cdot\varepsilon$

这里 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_l)^T$，并且 $\varepsilon_j>0$，对于所有 $1\leqslant j\leqslant l$，显然

$$D_W(t,\omega)=D_u(t,\omega)+2K(t,\omega)\exp[2\int_{t_0}^{t}K(s,\omega)ds]\cdot\varepsilon,$$

由此及定理的假设得

$$\begin{aligned}D_W(t,\omega)&\geqslant g(u(t,\omega),t,\omega)+2K(t,\omega)\\&\quad\times\exp[2\int_{t_0}^{t}K(s,\omega)ds]\cdot\varepsilon \quad (因W>u并由(4.43))\\&\geqslant g(W(t,\omega),t,\omega)+K(t,\omega)\\&\quad\times\exp[2\int_{t_0}^{t}K(s,\omega)ds]\cdot\varepsilon>g(W(t,\omega),t,\omega). \quad a.s.\end{aligned}$$

由于

$$v(t_0,\omega)<W(t_0,\omega), \ a.s.$$

则由定理 4.14，有

$$v(t,\omega)<W(t,\omega), 对于 t\in[t_0,t_0+a).$$

让 $\varepsilon\to0$ 取极限，就得到所要求的不等式。 ▮

三、随机比较定理

类似于§4.1，有了随机微分不等式，我们就可着手建立随机比较定理，为此，引进辅助系统

$$u'(t,\omega)=g(u(t,\omega),t,\omega),u(t_0,\omega)=u_0(\omega) \qquad (4.44)$$

的最大和最小解的概念，以及建立系统(4.44)的最大和最小解的存在性定理。

定义4.4 让 $r(t,\omega)$ 为随机微分系统(4.44)在$[t_0,t_0+a)$上的一个解过程，则 $r(t,\omega)$ 是称为 (4.44) 的一个最大解，如果对每个存在于$[t_0,t_0+a)$上的解 $u(t,\omega)$，有

$$u(t,\omega)\leqslant r(t,\omega),\quad a.s.\quad t\in[t_0,t_0+a). \qquad (4.45)$$

最小解 $\rho(t,\omega)$ 可通过(4.45)的反向不等式，类似地定义。

定理4.16（最大解与最小解存在定理）。 假若定理4.11的假设成立，并且 $g(u,t,\omega)$对固定的 $t\in J$ 关于u拟单调非降，则(4.44)对某个 $b>0$，在$[t_0,t_0+b]$上存在最大和最小解。

【证明】 让 $\varepsilon>0$，并使得$|\varepsilon|<\rho/4$ 考虑初值问题：

$$u'(t,\omega)=g_\varepsilon(u(t,\omega),t,\omega),u(t_0,\omega)=u_0(\omega)+\varepsilon. \qquad (4.46)$$

这里 $g_\varepsilon(u,t,\omega)=g(u,t,\omega)+\varepsilon$，并且 $u_0(\omega)\in\bar{U}(Z,\rho/4)$. 易见，$g_\varepsilon(u,t,\omega)$满足定理 4.11 的所有假设，其中只要以 $K(t,\omega)+\rho/4$ 来替代它的 $K(t,\omega)$即可。因此，由定理4.11初值问题(4.46)，对于某个 $b>0,t\in[t_0,t_0+b]$存在一个解 $u(t,\omega,\varepsilon)$。

因为对最小解情形的证明是类似的，故下面我们只证明最大解的存在性。

让 $\varepsilon_1<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon$，并让 $u_1(t,\omega)=u(t,\omega,\varepsilon_1),u_2(t,\omega)=u(t,\omega,\varepsilon_2)$，分别为

$$u_1'(t,\omega)=g_{\varepsilon_1}(u_1(t,\omega),t,\omega),u_1(t_0,\omega)=u_0(\omega)+\varepsilon_1,$$

$$u_2'(t,\omega)=g_{\varepsilon_2}(u_2(t,\omega),t,\omega),u_2(t_0,\omega)=u_0(\omega)+\varepsilon_2$$

的解，这意味着 $u_2'(t,\omega)>g_{\varepsilon_1}(u_2(t,\omega),t,\omega),t\in[t_0,{}_0t+b]$.

并且 $u_2(t_0,\omega)>u_1(t_0,\omega)$，利用定理 4.14，有

$$u_1(t,\omega)<u_2(t,\omega),t\in[t_0,t_0+b].$$

选取一个递降序列 $\{\varepsilon_n\}$，使当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$，于是有

$$r(t,\omega)=\lim_{n\to\infty}u_n(t,\omega)\quad a.s.\quad t\in[t_0,t_0+b].\tag{4.47}$$

显然 $r(t_0,\omega)=u_0(\omega)$。由于对固定的 $t\in[t_0,t_0+b]$，$g(u,t,\omega)$ 关于 u 的连续性，我们有

$$\lim_{n\to\infty}g_{\varepsilon_n}(u_n(t,\omega),t,\omega)=g(r(t,\omega),t,\omega),\quad a.s.$$

$$t\in[t_0,t_0+b].\tag{4.48}$$

利用 Lebesguc 控制收敛定理推得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}g_{\varepsilon_n}(u_n(s,\omega),s,\omega)ds=\int_{t_0}^{t}g(r(s,\omega),s,\omega)ds,$$

$$t\in[t_0,t_0+b].$$

这意味着 $r(t,\omega)$ 为(4.44)的一个解。

下面我们来表明 $r(t,\omega)$ 就是所要求的(4.44)的最大解。让 $u(t,\omega)$ 为(4.44)的任一解，则利用定理 4.14，我们有

$$u(t,\omega)<u_n(t,\omega),t\in[t_0,t_0+b].$$

因为

$$u(t,\omega)\leqslant\lim_{n\to\infty}u_n(t,\omega)=r(t,\omega),\quad a.s.$$

在 $[t_0,t_0+b]$ 上是一致的。▌

现在我们来给出随机比较定理，此定理就是§4.1比较定理的推论对于随机微分系统的推广。（见 Ladde[3]）。

定理4.17（随机比较定理）　假设

(H_1)．g 为定义在 G 上的 E_l 值可测随机函数，且 $g(u,t,\omega)$ 对固定的 t 关于 u 是 $a.s.$ 连续的。

这里 $G=D\times[t_0,t_0+a)$ 且 D 为 E_l 中一开集。

(H_2)．$g(u,t,\omega)$ 对每一固定的 t 关于 u 是 $a.s.$ 拟单调

的。

(H_3). $r(t,\omega)$ 为随机微分系统:

$$u'(t,\omega)=g(u(t,\omega),t,\omega),u(t_0,\omega)=u_0(\omega). \qquad (4.49)$$

在$[t_0,t_0+a)$上的最大解。

(H_4). m 为定义在$[t_0,t_0+a)$上 $a.s.$ 连续的E_l-值可分随机过程, $(m(t),t)\in G$, $a.s.$

$$m(t_0,\omega)\leqslant u_0(\omega), \ a.s. \qquad (4.50)$$

且

$$D\,m(t,\omega)\leqslant g(m(t,\omega),t,\omega),t\in[t_0,t_0+a)-S. \quad (4.51)$$

则

$$m(t,\omega)\leqslant r(t,\omega),t\in[t_0,t_0+a). \qquad (4.52)$$

【证明】 对充分小的 $\varepsilon>0$, 让 $u(t,\omega,\varepsilon)$ 为

$$u'(t,\omega,\varepsilon)=g(u(t,\omega,\varepsilon),t,\omega)+\varepsilon,u(t_0,\omega)=u_0(\omega)+\varepsilon$$

的任一解. 则由定理4.14, 有

$$m(t,\omega)<u(t,\omega,\varepsilon),t\in[t_0,t_0+a).$$

因为在包含于$[t_0,t_0+a)$中的每一闭区间上有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(t,\omega,\varepsilon)=r(t,\omega). \quad ▋$$

推论4.18 如果定理中的不等式(4.50),(4.51)反向则结论(4.52)是以

$$m(t,\omega)\geqslant\rho(t,\omega),t\in[t_0,t_0+a)$$

来替代。这里 $\rho(t,\omega)$ 为(4.49)的最小解。

四、关于解的唯一性与连续依赖性

现在我们先来给出随机微分系统(4.38)解的唯一性的一个简单结果。

定理4.19(解的唯一性定理) 假设

(i)f 为定义在 $\overline{U}(Z,\rho)\times J$ 上的 E_l- 值可测随机函数，且 $f(X,t,\omega)$ 对每一 $t\in J$ 关于 X，$a.s.$ 连续。

(ii)g 为定义在$[0,2\alpha]\times J$ 上的 E_1^+ 值可测随机函数，且 $g(u,t,\omega)$ 对每一 $t\in J$ 关于 u,$a.s.$ 连续，並且只要 $u(t)$，$a.s.$ 绝对连续，就有 $g\in L$。这里 $\alpha=\rho$。

(iii)$u(t)\equiv 0$ 为纯量随机微分方程：

$$u'(t,\omega)=g(u(t,\omega),t,\omega),u(t_0,\omega)=0 \qquad (4.53)$$

在$[t_0,t_0+b]\subset J$ 上的 $a.s.$ 唯一解。

(iv) 对于(X,t)，$(Y,t)\in\overline{U}(Z,\rho)\times J$，有

$$|f(X,t,\omega)-f(Y,t,\omega)|\leqslant g(|X-Y|,t,\omega). \qquad (4.54)$$

(v)$X_0\in\overline{U}(Z,\frac{1}{2}\rho)$.

(vi)$0\leqslant K(t,\omega)\in L,t\in J$

满足

$$|f(X,t,\omega)|<K(t,\omega),\text{对于}(X,t)\in\overline{U}(Z,\rho)\times J.$$

则随机微分系统(4.38)在$[t_0,t_0+b]$上有唯一的一个解。

【证明】 由(i)，(v)，(vi)並利用定理4.11，显然(4.38)有一个解 $X(t,\omega)=X(t,X_0,t_0,\omega)$. 让

$Y(t,\omega)=Y(t,X_0,t_0,\omega)$为 (4.38) 在 $[t_0,t_0+b]$ 上的另一个解，定义 $m(t,\omega)=|X(t,\omega)-Y(t,\omega)|$，显然在 $[t_0,t_0+b]$ 上，$m(t,\omega)$,$a.s.$ 绝对连续。因为 $X(t,\omega)$,$a.s.$ 绝对连续且 $|X|$ 关于 X 是 Lipschitz 的，则

$$\begin{aligned} m'(t,\omega)&\leqslant|X'(t,\omega)-Y'(t,\omega)|=|f(X(t,\omega),t,\omega)\\ &\quad -f(Y(t,\omega),t,\omega)| \qquad (\text{由}(4.54))\\ &\leqslant g(m(t,\omega),t,\omega). \end{aligned}$$

注意 $m(t_0,\omega)=0$, $a.s.$，从而由定理4.17，我们有

$$m(t,\omega)\leqslant r(t,\omega),t\in[t_0,t_0+b],$$

这里 $r(t,\omega)$ 为(4.53)的最大解。由此及假设(iii)即推得在 $[t_0,t_0+b]$ 上有 $m(t,\omega)=0$。于是定理得证。 ▮

推论4.20 如果定理中的函数 $g(u,t,\omega)=K(t,\omega)u$，则条件(4.54)就化简为熟知的局部 Lipschitz 条件。

在构造一个物理、经济或生物系统的数学模型时，我们要建立函数 $f(X,t,\omega)$，此时不可避免的要产生误差，另外，在初始条件中也会出现误差。数学的目的就是要充分地去认识在什么条件下，方程本身和初始条件的任意小的改变，解的改变也可任意小。这就是所谓解关于参数的连续依赖性的问题。下面我们就来建立解关于参数的连续依赖性定理。

定理4.21（见 Morozan[4] 及 Strand[5]）。

$(\mathrm{H}_1)_\lambda$. f 为定义在 $D\times J\times\Lambda$ 上的 E_l 值可测随机函数，$f(X,t,\lambda,\omega)$ 对每固定的 t 关于 (X,λ), $a.s.$ 连续。D 为 E_l 中一开集，Λ 为 E_m 中一个开的参数 λ 集。

$(\mathrm{H}_2)_\lambda$. g 为定义在 $E_1^+\times J$ 上的 E_1^+ 值可测随机函数且 $g(u,t,\omega)$ 对每一 $t\in J$ 关于 u, $a.s.$ 连续，并且只要 $u(t)$, $a.s.$ 绝对连续，就有 $g\in L$。

$(\mathrm{H}_3)_\lambda$. $u(t)=0$ 为(4.53)的 $a.s.$ 唯一解，使得 $u(t_0)=0$, $a.s.$ 并且(4.53)的解 $u(t,u_0,t_0,\omega)$ 关于 u_0 是 $a.s.$ 连续的。

$(\mathrm{H}_4)_\lambda$. 对于 $(X,t,\lambda),(Y,t,\lambda)\in D\times J\times\Lambda$，有

$$|f(X,t,\lambda,\omega)-f(Y,t,\lambda,\omega)|\leqslant g(|X-Y|,t,\omega) \tag{4.55}$$

$(\mathrm{H}_5)_\lambda$. $0\leqslant K(t,\omega)\in L, t\in J$，且满足

$$|f(X,t,\lambda,\omega)|\leqslant K(t,\omega) \text{ 对于 } (X,t,\lambda)\in\overline{D}_0\times J\times\Lambda, a.s. \tag{4.56}$$

这里 $\overline{D}_0$ 为 D 的任一紧子集。

则对 $\forall\varepsilon>0$，和 $\lambda_0\in\Lambda$，$\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对每一 λ，只要 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta$，就有方程：

$$X'(t,\omega)=f(X(t,\omega),t,\lambda,\omega),$$
$$X(t_0,\lambda,\omega)=X_0(\lambda,\omega) \tag{4.57}$$

一容有的唯一解 $X(t,\lambda,\omega)=X(t,X_0(\lambda,\omega),t_0,\omega)$ 满足

$$|X(t,\lambda,\omega)-X(t,\lambda_0,\omega)|<\varepsilon, t\in J. \tag{4.58}$$

【证明】 在假设 $(H_1)_\lambda$ 和 $(H_5)_\lambda$ 下，由定理 4.11 的推论知，初值问题(4.57)在 $[t_0,t_0+b]$ 上至少有一个解，只要 $(X_0,t_0,\lambda)\in D\times J\times \Lambda$ 的一个紧子集。进而，由 $(H_2)_\lambda$—$(H_4)_\lambda$ 和定理 4.19 知，$X(t,\lambda)$ 是(4.57)的唯一解过程。让 λ_0 为 Λ 的任一元素，因为族 $\{X(t,\lambda)\}$ 是 $a.s.$ 等度连续和等度有界的，于是推得对于几乎所有固定的 $\omega\in\Omega$，存在一个 λ_n 的序列，使当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\lambda_0$；並且依赖于 ω 的一致极限

$$\lim_{\lambda_n\to\lambda_0} X(t,\lambda_n,\omega)=X(t,\lambda_0,\omega) \tag{4.59}$$

存在。

从对固定的 $t\in[t_0,t_0+b]$，$f(X,t,\lambda,\omega)$ 关于 (X,λ) 的 $a.s.$ 连续性，我们得到对于(4.59)中固定的 ω，当 $n(\omega)\to\infty$ 时，有

$$f(X(t,\lambda_n,\omega),t,\lambda_n,\omega)\to f(X(t,\lambda_0,\omega),t,\lambda_0,\omega), \tag{4.60}$$

利用 Lebesgue 控制收敛定理，易见

$$\int_{t_0}^{t} f(X(s,\lambda_n,\omega),s,\lambda_n,\omega)ds\to\int_{t_0}^{t} f(X(s,\lambda_0,\omega),s,\lambda_0,\omega)ds. \tag{4.61}$$

显然，对于(4.59)中固定的 ω，$X(t,\lambda_0,\omega)$ 是确定性系统：

$$X'(t,\lambda_0,\omega)=f(X(t,\lambda_0,\omega),t,\lambda_0,\omega), X(t_0,\lambda_0)=X_0(\lambda_0,\omega) \tag{4.62}$$

的解。因为对于 $\lambda=\lambda_0$，(4.57)的解过程是唯一的，所以对每个当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\lambda_0$ 的序列 $\{\lambda_n\}$，对于固定的(4.59)中

的 $\omega\in\Omega$，一致极限

$$\lim_{\lambda_n\to\lambda_0} X(t,\lambda_n,\omega)=X(t,\lambda_0,\omega) \tag{4.63}$$

存在。其意味着

$$\lim_{\lambda_n\to\lambda_0} X(t,\lambda_n,\omega)=X(t,\lambda_0,\omega), a.s.$$

因此 $X(t,\lambda_0,\omega)$ 是满足(4.62)的一个随机过程，其表明极限(4.59)，(4.60)，(4.61)和(4.63)$a.s.$ 成立。

此外，(4.63)和序列λ_n 的选取意味着在$[t_0,t_0+b]$上，一致有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} X(t,\lambda,\omega)=X(t,\lambda_0,\omega)\quad a.s.$$

其表明对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $\lambda_0\in\Lambda$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对每一 λ，只要 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta$，在$[t_0,t_0+b]$上，就有(4.57)的解过程 $X(t,\lambda)$ 满足(4.58)。现在利用定理 4.13 和此定理证明中所用的方法，此解可延拓到 J 上。 ∎

〔注〕(1)如果除了假设 $(H_2)_\lambda-(H_4)$ 是以假设初值问题（4.57）有唯一解来替代外，其它假设仍保持，则该定理的结论仍然正确。

(2)该定理中的参数 λ，可以 E_m 值的随机参数 $\lambda(\omega)$ 来替代，其证明只要将上面的证明稍作改动即可。

定理4.22（解关于初值的连续依赖性定理） 如果保持定理 4.19 的假设，进而(4.53)过(u_0,t_0)的解 $u(t,\omega)$关于初值$(u_0,t_0)a.s.$连续，则(4.38)过(X_0,t_0)的解 $X(t,X_0,t_0)$ 是 $a.s.$ 唯一的并且关于初值(X_0,t_0)，$a.s.$ 连续。

【证明】 (4.38) 解的存在性与唯一性的证明，由定理 4.19的证明即得。关于初值的连续依赖性的证明，可根据定理 4.21 的证明改述。

考虑下面的随机微分系统：

$$X'(t,X_0(\omega),t_0,\omega)=f(X(t,X_0(\omega),t_0,\omega),t,\omega)$$

$$X(t_0,\omega)=X_0(\omega). \tag{4.64}$$

这里(X_0,t_0)就是所考虑的随机参数。鉴于定理的假设和函数$f(X,t,\omega)$与参数无关，易见(4.64)满足定理4.21的假设。然而(4.38)解关于初值的连续依赖性的形式证明可叙述如下：

设

$$X_1(t,\omega)=X(t,X_1(\omega),t_1,\omega),$$

$$X_2(t,\omega)=X(t,X_2(\omega),t_2,\omega),$$

分别为(4.38)过(X_1,t_1)与(X_2,t_2)的解。不失一般性，假设$t_2<t_1$。定义

$$m(t,\omega)=|X_1(t,\omega)-X_2(t,\omega)|,$$

$$m(t_1,\omega)=|X_1-X_2(t_1,\omega)|. \tag{4.65}$$

由(4.54)我们得到

$$m'(t,\omega)\leqslant g(m(t,\omega),t,\omega),\quad t\geqslant t_1. \tag{4.66}$$

由(4.65)，(4.66)和定理4.17，有

$$m(t,\omega)\leqslant r(t,\omega),\quad t\geqslant t_1. \tag{4.67}$$

这里$r(t,\omega)=r(t,m(t_1,\omega),t_1,\omega)$为(4.53)过$(m(t_1),t_1)$的最大解。因为$X_2(t,\omega)$关于$t$, $a.s.$连续且由假设$r(t,u_0(\omega),t_0,\omega)$关于$(u_0,t_0)$，$a.s.$连续，故由定理4.19的(iii)，(4.67)和$m(t,\omega)$的定义，有

$$\lim_{\substack{t_1\to t_2\\ x_1\to x_2}} m(t,\omega)\leqslant r(t,t_2,0)=0,\ a.s.$$

因此

$$\lim_{\substack{t_1\to t_2\\ x_1\to x_2}} |X_1(t,\omega)-X_2(t,\omega)|=0,\ a.s. \quad ▮$$

§ 4.3 随机Ляпунов函数与稳定性概念

在第一篇中，我们已看到 Ляпунов 第二方法（或直接法），在随机微分系统的稳定性分析中，起着非常显著的作用。下面我们将引进随机 Ляпунов 函数的概念，並且利用此概念以及随机微分不等式的理论来建立随机比较方法。

一、随机 Ляпунов 函数

考虑随机微分系统：

$$
\begin{aligned}
&X'(t,\omega)=f(X(t,\omega),t,\omega),\\
&X(t_0,\omega)=X_0(\omega),
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

这里 $X\in E_l$；f 为定义在 $U(\rho)\times E_1^+$ 上的 E_l 值可测随机函数，並且 f 光滑得足以保证(4.68)解过程

$$X(t,\omega)=X(t,X_0,t_0,\omega)$$

的存在性。

假设 $V(X,t,\omega)$ 是定义在 $U(\rho)\times E_1^+$ 上 $a.s.$ 连续的 E_k 值可分随机函数，並且定义

$$D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)\triangleq\limsup_{h\to 0^+}h^{-1}[V(X+hf(X,t,\omega),t+h,\omega)-V(X,t,\omega)] \tag{4.69}$$

显然，$D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)$ 存在，对于所有 $(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$，並且是一个可测随机过程。

此向量随机函数V，我们就称其为**随机向量Ляпунов函数**。

〔注〕 在有的文献中（例如，第5章参考文献Kushner[10]；费定选[6]）将相应于随机微分系统的确定性 Ляпунов 函数 $V(X,t)$ 亦称为随机 Ляпунов 函数。

现在我们利用随机向量 Ляпунов 函数来叙述基本比较定理。

定理4.23 假设

(i) g 为定义在 $E_k\times E_1^+$ 上的 E_k 值可测随机函数，并且 $g(u,t,\omega)$，a.s. 连续且对每一固定的 $t\in E_1^+$，关于 u 是拟单调非降的。

(ii) $r(t,\omega)=r(t,u_0,t_0,\omega)$ 为辅助随机微分系统：

$$u'(t,\omega)=g(u(t,\omega),t,\omega),u(t_0,\omega)=u_0(\omega) \tag{4.70}$$

在$[t_0,+\infty)$上的最大解过程。

(iii) V 为定义在 $E_l\times E_1^+$ 上 a.s. 连续的 E_k 值可分随机函数，$V(X,t,\omega)$关于 X 为 a.s. 局部 Lipschitz 的并且对于$(X,t)\in E_l\times E_1^+$，有

$$D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)\leqslant g(V(X,t,\omega),t,\omega) \tag{4.71}$$

(iv) $X(t,\omega)=X(t,X_0,t_0,\omega)$ 为(3.1)存在于 $t\geqslant t_0$ 的任一解过程，其使得

$$V(X_0(\omega),t_0,\omega)\leqslant u_0(\omega), \tag{4.72}$$

则

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant r(t,\omega),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.73}$$

【证明】 令

$$m(t,\omega)\triangleq V(X(t,\omega),t,\omega),$$
$$m(t_0,\omega)\triangleq V(X_0(\omega),t_0,\omega). \tag{4.74}$$

因为 $X(t,\omega)$是(4.68)的一个解过程，并且 V 为定义在 $E_l\times E_1^+$ 上 a.s. 连续的 E_k 值可分随机函数。显然 $m(t,\omega)$ 对于 $t\geqslant t_0$ 为 a.s. 连续的，并且对于小的 $h>0$，我们有

$$m(t+h,\omega)-m(t,\omega)=V(X(t+h,\omega),t+h,\omega)$$
$$-V(X(t,\omega),t,\omega)$$
$$=V(X(t+h,\omega),t+h,\omega)-V(X(t,\omega)$$

$$+hf(X(t,\omega),t,\omega),t+h,\omega)+V(X(t,\omega)$$

$$+hf(X(t,\omega),t,\omega),t+h,\omega)-V(X(t,\omega),t,\omega)$$

$$\leqslant K|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)-hf(X(t,\omega),t,\omega)|e$$

$$+V(X(t,\omega)+hf(X(t,\omega),t,\omega),t+h,\omega)$$

$$-V(X(t,\omega),t,\omega),$$

这里 K 是 $V(X,t,\omega)$ 的局部 Lipschitz 常数并且

$$e=(1,1,\cdots,1)^T.$$

由此以及(4.69)，(4.71)，(4.74)和 $m(t,\omega)$ 的 $a.s.$ 连续性得到不等式：

$$D^+m(t,\omega)\leqslant g(m(t,\omega),t,\omega),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.75}$$

因此，由定理4.17，我们有

$$m(t,\omega)\leqslant r(t,\omega),t\geqslant t_0. \quad \blacksquare$$

下面的定理是定理4.23的变形，在实际中是常用的。

定理4.23′ 如果定理 4.23 的条件中除不等式(4.71)是以下列不等式替代外，其它均满足，

$$A(t)D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)+A'(t)V(X,t,\omega)$$

$$\leqslant g(A(t)V(X,t,\omega),t,\omega)\quad (X,t)\in E_l\times E_1^+. \tag{4.76}$$

这里 $A(t)=(a_{ij}(t))$，$a_{ij}(t)$ 为 E_1^+ 上 $a.s.$ 连续的 E_1 值可分随机函数，$A^{-1}(t)$ 存在且它的元素为 E_1^+ 上的 E_1^+ 值可测随机过程，并且 $A^{-1}(t)A'(t)$ 为可测过程，而且它的非对角线元素均非负，对于 $t\in E_1^+$，则

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant R(t,\omega),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.77}$$

这里 $R(t,\omega)=R(t,\nu_0,t_0,\omega)$ 为下列辅助随机微分系统的最大解：

$$\nu'(t,\omega)=A^{-1}(t,\omega)[-A'(t,\omega)\nu(t,\omega)$$

$$+g(A(t,\omega)\nu(t,\omega),t,\omega)], \tag{4.78}$$

$$\nu(t_0,\omega)=\nu_0(\omega),\ 并且\ A(t_0,\omega)\nu_0(\omega)=u_0(\omega).$$

【证明】 我们置 $W(X,t,\omega)=A(t,\omega)v(X,t,\omega)$，根据(4.76)和 $A(t)$ 的性质，易见

$$D_{(4.68)}^{+}W(X,t,\omega)\leqslant g(W(X,t,\omega),t,\omega),(X,t)\in E_l\times E_1^+.$$

这表明 $W(X,t,\omega)$ 满足定理4.68的所有假设，因此我们有

$$W(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant r(t,\omega),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.79}$$

这里 $r(t,\omega)$ 为(4.70)的最大解，同时 $u_0(\omega)=A(t_0,\omega)v_0(\omega)$. 现在易见

$$A(t,\omega)R(t,\omega)=r(t,\omega),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.80}$$

关系式(4.79)和(4.80)以及 $A(t)$ 的性质，给出

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant R(t,\omega),\quad t\geqslant t_0. \quad ∎$$

〔注〕(1)让 $B(t)$ 为一个可测的随机矩阵函数，它的元素是 $a.s.$ 非负的並且 $a.s.$ 局部 Lebesgue 可积，则在 E_1^+ 上随机矩阵函数 $A(t,\omega)=\exp[\int_0^t B(s,\omega)ds]$ 是相容于定理4.25的，只要 $A'(t,\omega)A(t,\omega)=A(t,\omega)A'(t,\omega)$.

(2)假设对于 $(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$，(4.71)和(4.76)保持，如果

$$X(t,\omega)=X(t,X_0,t_0,\omega),\quad X_0\in U(\rho),\quad a.s.$$

为(4.68)的任一解过程並且(4.72)保持，则(4.73)和(4.77)对于 $t\geqslant t_0$ 並且使得几乎必然有 $X(t)\in U(\rho)$ 的那些 t 值是正确的.

推论4.24 若保持定理4.23的假设，同时 $g(u,t,\omega)\equiv 0$, $a.s.$，则函数 $V(X(t,\omega),t,\omega)$ 关于 t 是 $a.s.$ 非增的，並且

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant V(X_0(\omega),t_0,\omega),\quad t\geqslant t_0.$$

通过前面的比较定理，我们可通过(4.70)的解过程得到(4.68)解过程的某种上估计。类似地，我们也可建立给出(4.68)解过程下估计的比较定理。

定理4.25 假设

(i) g 为定义在 $E_l\times E_1^+$ 上的 E_k 值可测随机函数，並且 $g(u,t,\omega)$, $a.s.$ 连续且对于固定的 $t\in E_1^+$，关于 u 是拟单调非降的。

(ii) $\rho(t,\omega)=\rho(t,u_0,t_0,\omega)$ 为(4.70)存在于 $t\geqslant t_0$ 的 a.s. 最小解过程。

(iii) V 为定义在 $E_l\times E_1^+$ 上 a.s. 连续的 E_k 值可分随机函数，$V(X,t,\omega)$ 关于 X 是 a.s. 局部 Lipschitz 的並且对于 $(X,t)\in E_l\times E_1^+$ 有

$$D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)\geqslant g(V(X,t,\omega),t,\omega). \qquad (4.81)$$

(iV) $X(t,\omega)=X(t,X_0,t_0,\omega)$ 为(4.68)存在于 $t\geqslant t_0$ 的任一解过程，使得

$$V(X_0,t_0,\omega)\geqslant u_0(\omega), \qquad (4.82)$$

则

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\geqslant\rho(t,\omega), \quad 对于\ t\geqslant t_0.$$

证明留给读者。

〔注〕 定理4.23，定理4.23′（见 Ladde[a]）。

二、稳定性概念

由于系统(4.68)为最一般的随机微分系统（这里的初始条件也是随机的），因此，第一篇的一些稳定性概念在这里要稍作修改（参考第一章§1.5）。

让 $X(t,\omega)=X(t,X_0,t_0,\omega)$ 为(4.68)的任一解过程，不失一般性，我们假设 $X(t,\omega)\equiv0$ 为(4.68)过 $(0,t_0)$ 的唯一解过程（即唯一的平衡态）。

定义4.5 （4.68）的平凡解是称为

(SP_1). **弱随机稳定的**. 如果对每一 $\varepsilon>0,\eta>0,t_0\in E_1^+$，存在一个正函数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon,\eta)$，其对每 ε 和 η 关于 t_0 连续，使当 $P\{\omega:|X_0(\omega)|>\delta\}<\eta$ 时，就有

$$P\{\omega:|X(t,\omega)|\geqslant\varepsilon\}<\eta, \quad t\geqslant t_0.$$

(SP_2). **弱随机一致稳定的**。如果(SP_1)成立，同时δ不依赖于t_0。

(SP_3). **弱随机渐近稳定的**。如果它是弱随机稳定的，并且如果对任一$\varepsilon>0, \eta>0, t_0\in E_1^+$，存在数$\delta_0=\delta(t_0)$和$T=T(t_0,\varepsilon,\eta)$，使当$P\{\omega: |X_0(\omega)|>\delta_0\}<\eta$时，就有

$$P\{\omega: |X(t,\omega)|\geqslant\varepsilon\}<\eta, \quad t\geqslant t_0+T.$$

(SP_4). **弱随机一致渐近稳定的**。如果(SP_1)和(SP_3)立，同时δ，δ_0和T均不依赖于t_0。

(SS_1). **几乎必然稳定(或依概率1稳定)的**。如果对每$\varepsilon>0, t_0\in E_1^+$，存在一个正函数$\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使当$|X_0(\omega)|\leqslant\delta$ $a.s.$时，就有

$$|X(t,\omega)|<\varepsilon, \ a.s. \quad t\geqslant t_0.$$

(SS_2). **几乎必然一致稳定的**。如果(SS_1)成立，同时δ不依赖于t_0。

(SS_3). **几乎必然渐近稳定的**。如果它是几乎必然稳定的，并且如果对任一$\varepsilon>0, t_0\in E_1^+$，存在$\delta_0=\delta(t_0)$和$T=T(t_0,\varepsilon)$，使当$|X_0(\omega)|\leqslant\delta_0$，$a.s.$时，就有

$$|X(t,\omega)|<\varepsilon, \quad a.s. \quad t\geqslant t_0+T.$$

(SS_4). **几乎必然一致渐近稳定的**。如果(SS_1)和(SS_3)成立，同时δ,δ_0和T均不依赖于t_0。

(SM_1). **p稳定的**。如果对每$\varepsilon>0, t_0\in E_1^+$，存在一个正函数$\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使当$E|X_0(\omega)|^p\leqslant\delta$时，就有

$$E|X(t,\omega)|^p<\varepsilon, \quad t\geqslant t_0.$$

(SM_2). **p一致稳定的**。如果(SM_1)成立，同时δ不依赖于t_0。

(SM_3). **渐近p稳定的**。如果它是p稳定的，并且对任一$\varepsilon>0, t_0\in E_1^+$，存在$\delta_0=\delta_0(t_0)$和$T=T(t_0,\varepsilon)$，使当

$$E|X_0(\omega)|^p \leqslant \delta_0$$

时，就有

$$E|X(t,\omega)|^p < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0 + T.$$

(SM_4). p **一致渐近稳定的**。如果 (SM_2) 和 (SM_3) 成立，同时 δ, δ_0 与 T 均不依赖于 t_0。

〔注〕(1)定义 (SM_1)—(SM_4) 中的 p 均为正的常数.

(2)基于定义4.5，我们可以叙述其它稳定性与有界性的定义，见 Lakshmikantham and Leela[1].

(3)注意，我们这里的稳定性概念是局部性的，如果需要研究解的全局性态，诸如 Lagrange 稳定性等，则需要取系统(4.68)中的 $\rho=\infty$。

为了方便，我们引进某些单调函数类。

定义4.6 函数 $\phi(u)$ 是称为属于类 $\mathscr{K}$ 的，如果

$$\phi \in C[[0,\rho), E_1^+], \phi(0)=0,$$

且 $\phi(u)$ 关于 u 是严格递增的。这里 $0<\rho\leqslant\infty$.

这就是 H. Hahn (1976) 意义下的所谓 $\mathscr{K}$ **类函数**。

定义4.7 函数 $b(u)$ 是称为属于类 $\mathscr{V}\mathscr{K}$，如果 $b\in C[[0,\rho), E_1^+]$, $b(0)=0$ 且 $b(u)$ 是凸的且关于 u 是严格递增的。

定义4.8 函数 $a(u,t)$ 是称为属于类 $\mathscr{B}\mathscr{K}$，如果

$$a\in C[[0,\rho)\times E_1^+, E_1^+], a(0,t)=0,$$

且 $a(u,t)$ 对每一 $t\in E_1^+$ 关于 u 是凹的並且是严格递增的。

为了建立比较准则，我们还需要研究对应的辅助随机微分系统：

$$u' = g(u,t,\omega), u(t_0) = u_0(\omega). \tag{4.83}$$

这里 g 为定义在 $E_k\times E_1^+$ 上，E_k 值的可测随机函数，並使得 $g(u,t,\omega)$ 关于 (u,t) $a.s.$ 满足 Carathcodory 条件，而且 $g(u,t,\omega)$ 对固定的 t 关于 u 是 $a.s.$ 拟单调非降的。

我们假设 $u(t)\equiv 0$ 为(4.83)过 $(0,t_0)$ 的解。对应于稳定

性定义(SP_1)—(SP_4)，(SS_1)—(SS_4)和(SM_1)—(SM_4)我们以(SP_1^*)—(SP_4^*)，(SS_1^*)—(SS_4^*)和(SM_1^*)—(SM_4^*)来表示关于(4.83)平衡解$u(t)\equiv 0$的相应稳定性概念。

定义4.9 (4.83)的平凡解$u(t)\equiv 0$是称为

(SP_1^*). **弱随机稳定的**。如果对给定的$\varepsilon>0$, $\eta>0$, $t_0\in E_1^+$，存在一个正函数$\delta=\delta(t_0,\varepsilon,\eta)$，使当

$$P\{\omega:\sum_{i=1}^{k} u_{i_0}(\omega)>\delta\}<\eta,$$

就有

$$P\{\omega:\sum_{i=1}^{k} u_i(t,\omega)\geqslant\varepsilon\}<\eta, \qquad t\geqslant t_0.$$

定义(SP_2^*)—(SP_4^*)，(SS_1^*)—(SS_4^*)和(SM_1^*)—(SM_4^*)可类似的定义。

§4.4 稳定性的比较准则

利用上节建立的随机比较定理和引进的稳定性概念，我们即可建立稳定性的比较准则。这些比较准则就是确定性比较方法，对于一般随机微分系统的推广。

一、弱随机稳定性比较准则

定理4.26 假设

(i) g为定义在$E_k\times E_1^+$上的E_k值可测随机函数且$g(u,t,\omega)$，a.s.连续，並且对于固定的$t\in E_1^+$，关于u是拟单调非降的。

(ii) V为定义在$U(\rho)\times E_1^+$上a.s.连续的E_k值可分随机函数，並且$V(X,t,\omega)$关于X，a.s.满足局部Lipschitz条

件，而且对于 $(X,t,)\in U(\rho)\times E$ ，有

$$D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)\leqslant g(V(X,t,\omega),t,\omega). \quad (4.84)$$

(iii) 对于 $(X,t)\in U(\rho)\times E$ ，有

$$b(|X|)\leqslant\sum_{i=1}^{k}V_i(X,t,\omega)\leqslant a(|X|,t,\omega), \quad (4.85)$$

这里 $b\in\mathscr{K}$，$a(\cdot,t,\omega)\in\mathscr{K}$，且 a 为 $E_1^+\times E_1^+$ 上 $a.s.$ 连续的非负随机函数。则由

$$(SP_1^*)\Rightarrow(SP_1).$$

【证明】 $\forall\eta>0$，$0<\varepsilon<\rho$ 且 $t_0\in E_1^+$ 由于 (SP_1^*) 成立，故对给定的 $b(\varepsilon)>0$，$\eta>0$ 和 $t_0\in E_1^+$，存在一个正函数 $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon,\eta)$，使当

$$P\{\omega:\sum_{i}^{k}u_{i0}(\omega)>\delta_1\}<\eta, \quad (4.86)$$

就有

$$P\{\omega:\sum_{i}^{k}u_i(t,u_0,t_0,\omega)\geqslant b(\varepsilon)\}<\eta, \quad t\geqslant t_0. \quad (4.87)$$

让我们选取 $v_0=(u_{10},u_{20},\cdots,u_{k0})^T$，使得

$$V(X_0(\omega),t_0,\omega)\leqslant v_0(\omega),$$

且

$$\sum_{i}^{k}u_{i0}(\omega)=a(|X_0(\omega)|,t_0,\omega), \quad 对于X_0\in U(\rho). \quad (4.88)$$

因为 $a(\cdot,t_0,\omega)\in\mathscr{K}$，我们可找到一个 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon,\eta)$ 使得

$$P\{\omega:a(|X_0(\omega)|,t_0,\omega)>\delta_1\}=P\{\omega:|X_0(\omega)|>\delta\}. \quad (4.89)$$

现在我们可断言 (SP_1) 成立．假若不然，则必存在一个初始条件满足 $P\{\omega:|X_0(\omega)|>\delta\}<\eta$ 的 (4.68) 的解过程 $X(t,\omega)$ 和一个 $t_1>t_0$，使得

$$P\{\omega:|X(t_1,\omega)|\geqslant\varepsilon\}=\eta \text{ 且 } X(t)\in U(\rho),t\in[t_0,t_1] \quad (4.90)$$

另方面，由定理4.23有

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant r(t,u_0,t_0,\omega). \quad (4.91)$$

只要 $X(t,\omega)\in U(\rho)$。由(4.85)和(4.91)我们有

$$b(|X(t,\omega)|)\leqslant\sum_{i=1}^{k}V_i(X(t,\omega),t,\omega)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}r_i(t,u_0,t_0,\omega). \qquad (4.92)$$

关系式(4.87),(4.90)和(4.92)导致矛盾:

$$\eta=P\{\omega:|X(t_1,\omega)|\geqslant\varepsilon\}=P\{\omega:b(|X(t_1,\omega)|\geqslant b(\varepsilon)\}$$

$$\leqslant P\{\omega:\sum_{i=1}^{k}r_i(t_1,u_0,t_0,\omega)\geqslant b(\varepsilon)\}<\eta.$$

这就证明了(SP_1)必成立。 ▮

定理4.27 让定理4.26的假设满足，同时

$$a(r,t,\omega)=a(r,\omega),$$

则有

$$(SP_2^*)\Rightarrow(SP_2).$$

【证明】 由于 $a(r,t,\omega)=a(r,\omega)$，並根据定理 4.26 的证明，易见 δ 不依赖于 t_0，再由辅助系统(4.83)是弱随机一致稳定的，定理即得证。 ▮

定理4.28 若定理4.26的假设满足，则有

$$(SP_3^*)\Rightarrow(SP_3).$$

【证明】 我们注意 $(SP_3^*)\Rightarrow(SP_1^*)$，再由定理 4.26 有 $(SP_1^*)\Rightarrow(SP_1)$，即 (4.68) 的平凡解是弱随机稳定的。于是由(SP_1)，对固定的 $\varepsilon=\rho,\eta=\eta_0<1$，一定存在一个 (SP_1)中所要求的 $\delta_0^*=\delta(t_0,\rho,\eta_0)$。为了证明 (SP_3) 成立，只要证明对 $\forall 0<\varepsilon<\rho$, $0<\eta<\eta_0$ 和 $t_0\in E_1^+$，存在正数 $\delta_0=\delta(t_0)$ 和 $T=T(t_0,\varepsilon,\eta)$，使当 $P\{\omega:|X_0(\omega)|>\delta_0\}<\eta$ 时，就有

$$P\{\omega:|X(t,\omega)|\geqslant\varepsilon\}<\eta,\quad t\geqslant t_0+T. \qquad (4.93)$$

假设(SP_3^*)成立，则对给定的 $b(\varepsilon)>0,\eta>0$ 和 $t_0\in E_1^+$，存在数 $\delta^0(t_0)=\delta^0$ 和 $T(t_0,\varepsilon,\eta)=T>0$，使当

$$P\{\omega:\sum_{i=1}^{k} u_{i0}(\omega)>\delta^0\}<\eta$$

时，就有

$$P\{\omega:\sum_{i=1}^{k}u_i(t,u_0,t_0,\omega)\geqslant b(\varepsilon)\}<\eta, \quad t\geqslant t_0+T. \qquad (4.94)$$

如同前面，我们选取 u_0 使得(4.88)式成立。並选取 $\delta_0^{**}(t_0)=\delta_0^{**}$，使得

$$P\{\omega:a(|X_0(\omega)|,t_0,\omega)>\delta^0\}=P\{\omega:|X_0(\omega)|>\delta_0^{**}\}.$$

然后选取 $\delta_0=\min(\delta_0^*,\delta_0^{**})$，利用此 δ_0，我们可断言(4.93)成立。否则，必存在一序列 $\{t_n\}$，$t_n\geqslant t_0+T$，当 $n\to\infty$ 时，$t_n\to\infty$，使得对于满足 $P\{\omega:|X_0(\omega)|>\delta_0\}<\eta$ 的(4.68)的某个解过程，有

$$P\{\omega:|X(t_n,\omega)|\geqslant\varepsilon\}=\eta, t_n\geqslant t_0+T.$$

由此及(4.92)和(4.85)即推得(4.93)的正确性。 ▌

定理4.29 若定理4.27的假设成立，则有

$$(\mathrm{SP}_4^*)\to(\mathrm{SP}_4).$$

由定理4.27和定理4.28的证明，即可推得此定理的证明。

在某些情形，基于随机比较定理4.23′的结果，在讨论(4.68)的稳定性时是有效的。我们将简单地陈述对应于定理4.26的结果，它的证明留作习题。

定理4.30 除去(4.84)式是以下列关系式替代外，定理4.26的其它假设均成立。

$$A(t)D^+_{(4.68)}V(X,t,\omega)+A'(t)V(X,t,\omega)$$
$$\leqslant g(A(t)V(X,t,\omega),t,\omega),$$

这里 $A(t)=(a_{ij}(t))$ 满足定理4.25中的条件。

则由(4.78)平凡解的(SP_i^*)性质就有(4.68)平凡解的(SP_i)性质。

二、几乎必然稳定性比较准则

在这里，我们将介绍某些保证(4.68)平凡解几乎必然稳定性的比较准则，进而给出一个示例，以显示向量 Ляпунов 函数优越于纯量 Ляпунов 函数。

定理4.31 若定理 4.26 的条件(i)—(iii)保持，则有

$$(SS_1^*) \Rightarrow (SS_1).$$

【证明】 $\forall 0<\varepsilon<\rho$ 和 $t_0 \in E_+$。假设(SS_1^*)成立，则对给定的 $b(\varepsilon)>0$ 和 $t_0 \in E_1^+$，我们可找到一个正数$\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)$，使得

$$\sum_{i=1}^{k} u_{i0}(\omega) \leqslant \delta_1, \quad a.s. \tag{4.95}$$

就有

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(t_1,u_0,t_0,\omega) < b(\varepsilon), \quad t \geqslant t_0, \ a.s. \tag{4.96}$$

让我们选取 $u_0(\omega)$ 使得 $V(X_0,t_0,\omega) \leqslant u_0(\omega)$，并且

$$\sum_{i=1}^{k} u_{i0}(\omega) = a(|X_0(\omega)|,t_0,\omega). \tag{4.97}$$

因为 $a(\cdot,t,\omega) \in \mathscr{K}$ 且 a 为 $a.s.$ 连续的，故我们可找到一个 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使得

$$a(|X_0(\omega)|,t_0,\omega) \leqslant \delta_1 \quad 且 \quad |X_0(\omega)| \leqslant \delta \tag{4.98}$$

同时成立。我们断言，如果$|X_0(\omega)| \leqslant \delta$，$a.s.$，则有

$$|X(t,X_0,t_0,\omega)| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0, \ a.s.$$

假若不然，则必存在一个初始条件满足$|X_0(\omega)| \leqslant \delta$，$a.s.$的解过程 $X(t,X_0,t_0,\omega)$ 和 $\Omega_1 \subset \Omega, P(\Omega_1)>0$ 以及 $t_1>t_0$，使得

$$|X(t_1,\omega)| = \varepsilon, \quad \omega \in \Omega_1,$$

并且

$$|X(t,\omega)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0,t_1). \tag{4.99}$$

这意味着 $X(t) \in U(\rho)$对于 $t \in [t_0,t_1)$，故由定理 4.23 有

$$V(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant r(t,u_0,t_0,\omega)\text{对于}t\in[t_0,t_1). \quad (4.100)$$

从而推得

$$b(|X(t,\omega)|)\leqslant\sum_{i=1}^{k}V_i(X(t,\omega),t,\omega)\leqslant\sum_{i=1}^{k}r_i(t,\omega),$$
$$t\in[t_0,t_1). \quad (4.101)$$

关系式 (4.96), (4.99) 和(4.101) 以及所涉及的函数的连续性，导致矛盾：

$$b(\varepsilon)\leqslant\sum_{i=1}^{k}V_i(X(t_1,\omega),t_1,\omega)\leqslant\sum_{i=1}^{k}r_i(t_1,\omega)<b(\varepsilon),\quad \omega\in\Omega_1.$$

这就推得(SS_1)成立。从而定理得证。 ∎

为了显示利用向量 Ляпунов函数来替代纯量 Ляпунов 函数的有效性，我们考察下例。

例4.1 考虑具有随机系数的微分方程系统：

$$X'(t,\omega)=A(X,t,\omega)X(t,\omega),$$
$$X(t_0,\omega)=X_0(\omega). \quad (4.102)$$

这里$X\in E_2$, $A(X,t,\omega)$是一个 2×2 随机矩阵函数，其定义为

$$A(X,t,\omega)=\begin{pmatrix}e^{-t}-f_1(X,t,\omega) & \sin(2\pi t+\theta(\omega))\\ \sin(2\pi t+\theta(\omega)) & e^{-t}-f_1(X,t,\omega)\end{pmatrix}$$

其中 f_1 为定义在 $E_2\times E_1^+$ 上的非负可测随机函数 $f_1(0,t,\omega)=0$, $a.s.$ 並且 θ 为一个非负随机变量，其均匀分布于 $[0,2\pi]$ 上。显然 $\sin(2\pi t+\theta(\omega))$ 是一个遍历过程。

首先，我们选取一个单一的 Ляпунов 函数：

$$V(X,t,\omega)=x_1^2+x_2^2,$$

易见

$$D^+_{(4.102)}V(X,t,\omega)\leqslant[2e^{-t}+2|\sin(2\pi t+\theta(\omega))|]V(X,t,\omega).$$

由于 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$ 且 $f_1(X,t,\omega)\geqslant0$, 显然，辅助方程

$$u'(t,\omega)=2[e^{-t}+|\sin(2\pi t+\theta(\omega))|]u(t,\omega)$$

的平凡解是非几乎必然稳定的。因此，关于 (4.102) 的稳定

性，我们不能从纯量形式的定理 4.31 获得任何信息。

现在我们试图通过利用向量 Ляпунов 函数去寻求(4.102)的稳定性分析。取

$$V(X,t,\omega)=\begin{pmatrix}(x_1+x_2)^2\\(x_1-x_2)^2\end{pmatrix},$$

易见 V 的分量 V_1 和 V_2 都不是正定的，因此均不满足纯量形式的定理 4.31，然而，$V(X,t,\omega)$ 满足定理4.31 的假设。事实上

$$(x_1^2+x_2^2)\leqslant\sum_{i=1}^{2}V_i(X,t,\omega)\leqslant 2(x_1^2+x_2^2),$$

并且下列的向量不等式成立：

$$D_{(4.102)}V(X,t,\omega)\leqslant g(V(X,t,\omega),t,\omega),$$

并且

$$g(u,t,\omega)=\begin{bmatrix}2(e^{-t}+\sin(2\pi t+\theta(\omega))) & 0\\ 0 & 2(e^{-t}-\sin(2\pi t+\theta(\omega)))\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

显然，对于 $t\in E_1^+$，$g(u,t,\omega)$ 关于 u 是 a.s. 拟单调非降的，并且易见系统：

$$u'(t,\omega)=g(u(t,\omega),t,\omega)$$

是几乎必然稳定的。从而由定理 4.31 推得(4.102)的平凡解是几乎必然稳定的。

定理4.32 假设定理 4.30 的条件满足，则

(i) 由(4.78)的$(SS_1^*)\Rightarrow$(4.68)的(SS_1)。

(ii) 由(4.78)的$(SS_3^*)\Rightarrow$(4.68)的(SS_3)。

证明留给读者作为练习。

三、p 稳定性比较准则

定理4.33 假设定理 4.26 的条件(i)和(ii)保持，进而

假设

(iii) 对于 $(X,t)\in U(\rho)\times E_1$，有

$$b(|X|^p)\leqslant\sum_{i=1}^{k}V_i(X,t,\omega)\leqslant a(|X|^p,t),$$

这里 $b\in\mathscr{V}\mathscr{K}, a\in\mathscr{B}\mathscr{K}$，且 $p\geqslant1$。则有

$$(\mathrm{SM}_1^*)\Rightarrow(\mathrm{SM}_1).$$

【证明】 $\forall 0<\varepsilon<\rho, t\in E_1$。假设 (SM_1^*) 成立，则对给定的 $b(\varepsilon)>0$，和 $t_0\in E_1$，存在 $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}E\{u_{i0}(\omega)\}\leqslant\delta,$$

就有

$$\sum_{i=1}^{k}E\{u_i(t,u_0,t_0,\omega)\}<b(\varepsilon^p),\quad t\geqslant t_0. \tag{4.103}$$

我们选取 $u_0(\omega)$，使得 $V(X_0(\omega),t_0,\omega)\leqslant u_0(\omega)$ 并且

$$\sum_{i=1}^{k}E\{u_{i0}(\omega)\}=a(E\{|X_0(\omega)|^p\},t_0), X_0\in U(\rho) \tag{4.104}$$

因为 $a(\cdot,t_0)\in\mathscr{K}$，故我们可找到一个 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$ 使当 $E\{|X_0|^p\}\leqslant\delta$ 时，就有

$$a(E\{|X_0(\omega)|^p\},t_0)\leqslant\delta_1. \tag{4.105}$$

现在我们可断言，如果 $(E\{|X_0|^p\})^{1/p}\leqslant\delta$，就有

$$(E\{|X(t,\omega)|^p\}^{1/p}<\varepsilon,\quad t\geqslant t_0.$$

假若不然，则必存在一个初始条件满足

$$(E\{|X_0|^p\})^{1/p}\leqslant\delta$$

的解过程 $X(t,X_0,t_0,\omega)$ 和一个 $t_1\geqslant t_0$，使得

$$(E\{|X(t_1,\omega)|^p\})^{1/p}=\varepsilon,$$

且

$$(E\{|X(t,\omega)|^p)^{1/p}\leqslant\varepsilon,\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{4.106}$$

根据定理 4.26 的证明，並利用 b 的凸性，我们有

$$b(\varepsilon^p)\leqslant\sum_{i=1}^{k}E[V_i(X(t_1,\omega),t_1,\omega)]$$

$$\leqslant \sum_{i=1} E[r_i(t_1, u_0, t_0, \omega)]. \tag{4.107}$$

关系式(4.103)，(4.106)和(4.107)导致矛盾：

$$b(\varepsilon^p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} E[V_i(X(t_1,\omega), t_1, \omega)] \leqslant \sum_{i=1}^{k} E[r_i(t_1, u_0, t_0, \omega)] < b(\varepsilon^p).$$

这就证明了(SM_1)。 ∎

类似地，我们可建立下面的比较准则。

定理4.34 如果定理4.33的假设满足，则有

(i) $$(SM_3^*) \Rightarrow (SM_3).$$

(ii)另外，如果 $a(u,t)=a(u)$，则有

$$(SM_2^*) \Rightarrow (SM_2).$$
$$(SM_4^*) \Rightarrow (SM_4).$$

〔注〕 在定理4.33中，我们已假设辅助系统(4.83)的平凡解有一阶均值稳定性，並且$V(X,t,\omega)$满足：

$$b(|X|^p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} V_i(X,t,\omega) \leqslant a(|X|^p, t).$$

这些条件可以下面的假设来替代：

$$b(|X|^p) \leqslant [\sum_{i=1}^{k} V_i(X,t,\omega)]^p \leqslant a(|X|^p, t)$$

並且辅助系统(4.83)的平凡解有 p 阶均值稳定性。

本节的结果均取自 Ladde[3]Hasminskii[6]和 Morozan[4]。

参考文献

1 Lakshmikantham,V. and Leela.S. Differential and integral inequalities theory and applications. vol.I. Ordinary differential equations . Academic Press New York and London (1969).

2 Ladde,G.S. and Lakshmikantham. V. Random differential inequalities . Academic Press ,New York and London(1980)

3 Ladde,G.S. Systems of differential inequalities and stochastic differential equations III . J.Math.Phys. 17 (1976) 2113-2120 .

4 Morozan,T. Stabilitatea sistemeler cu parametri Aleatori Ediatori Academiei Repubicii Socialiste Romania Bucharest (1969).

5 Strand,J.L. Random ordinary differential equations . J.Differential equations 7 (1970) 538-553 .

6 Hasminskii,R.Z. On the stability of nonlinear stochastic systems . Prikl.Mat.Meh.30 (1966) 915-921 .

5

Itô随机微分方程的稳定性

本章以比较方法，从向量 Ляпунов 函数出发来研究较一般的非时齐 Itô 方程的稳定性。为此，首先建立 Itô 型的随机微分不等式与比较定理。在这些比较定理的基础上，在 §5.2 与 §5.3 中我们分别研究 Itô 方程的条件随机稳定性与有界性，其特例即为通常的原点随机稳定性与一般的有界性。在 §5.4 中专门考察 Itô 方程指数稳定性的条件並讨论几乎必然稳定性问题。在 §5.5 中利用比较方法给出几个关于 Itô 方程的不稳定性定理。最后，在 §5.6 中我们将初步探讨随机稳定性比较准则的逆定理，即关于随机 Ляпунов 函数的存在性。

定义 5.1 函数 $b(X)$ 称为属于类 $\mathscr{PK}$ ($\mathscr{PK}^*$)，如果 $b\in C[U(\rho), E_1^+]$ ($b\in C[E_l, E_1^+]$)，$b(o)=0$，当 $X\neq 0$ 时，$b(X)>0$.

定义 5.2 设 G 是一个从 $E_l\to E_h$ 的函数. 函数 G 称为凸的，如果对于 $1\leqslant i\leqslant h$ 的每个分量 G_i 是凸的. G 称为凹的，如果 $(-G)$ 是凸的.

定义 5.3 过程 $\{f(t), t\in[s,T]\}$ 称为关于递增的 σ 代数族 $\{\mathscr{N}_t, t\geqslant 0\}$ 是**非料的**，如果存在一个过程 $\tilde{f}(t)$，使得依概率 1 有 $f(\cdot,\omega)=\tilde{f}(\cdot,\omega)$，並且对每一 $t\in[s,T]$，$\tilde{f}(t)$ 是 $\mathscr{N}_t$

可测的。

定义 5.4 非料过程 $f(t)$ 称为属于类 $L_w[\alpha,\beta]$ $(1\leqslant p<\infty)$，如果它满足

$$p\left\{\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt<\infty\right\}=1.$$

非料过程 $f(t)$ 称为属于类 $M_w^p[\alpha,\beta]$，如果它属于 $L_w^p[\alpha,\beta]$ 且满足 $E\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt<\infty$.

考虑 Itô 随机微分系统：

$$\begin{aligned}&dX(t)=b(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t),\\&X(t_0)=X_0(\in E_l),\ a.s.\end{aligned}\tag{5.1}$$

这里 dX 为 Itô 意义下的随机微分。

$$b(X,t)=(b_1(X,t),\cdots,b_l(X,t))^T,$$

$$\sigma(X,t)=(\sigma_{ij}(X,t))_{l\times k},$$

$$|\sigma(X,t)|^2=\sum_{i,j}|\sigma_{ij}(X,t)|^2\quad (X,t)\in E_l\times E_1^+,$$

$W(t)$ 是 k 维标准 Wiener 过程。

我们说过程 $X(t)$ 满足系统(5.1)，即意味着假设

$$b(X(t),t)\in L_w^1[t_0,T],\sigma(X(t),t)\in L_w^2[t_0,T].$$

现假定 $b(X,t),\sigma(X,t)$ 满足下列条件：

(A_1). 对于 $(X,t)\in E_l\times E_1^+,b(X,t),\sigma(X,t)$ 是可测的。

(A_2). 对于 $(X,t),(Y,t)\in E_l\times[t_0,\infty)$ 存在一正数 L 使得 $|b(X,t)|\leqslant L(1+|X|),|\sigma(X,t)|\leqslant L(1+|X|)$.

对任一 $N>0$，存在一正数 L_N，使当 $|X|\leqslant N$，$|Y|\leqslant N$，$t_0\leqslant t<\infty$ 时，有

$$|b(X,t)-b(Y,t)|\leqslant L_N|X-Y|,$$

$$\|\sigma(X,t)-\sigma(Y,t)\|\leqslant L_N|X-Y|.$$

在这些假设下，由Friedman[12]的定理5.2.2，我们知道Itô系统(5.1)的解过程 $X(t)$ 是

(B_1). 一个具有无穷生存时间的 Markov 过程。

(B_2). 依概率1唯一.

(B_3). 依概率1连续、可分，並对任一$T(t_0<T<\infty)$有

$$X(t)\in M_w^2[t_0,T].$$

下面考虑的(5.1)的解过程是在一零测集（不依赖于 t）上修改 $X(t)$ 的定义，使其一切样本函数对于 $t\geqslant t_0$ 连续. 并且也记此过程为 $X(t)$。

作为与(5.1)相对应的时齐Itô系统为

$$\begin{aligned}&dX(t)=b(X(t))dt+\sigma(X(t))dW(t)\\&X(t_0)=X_0(\in E_l),\ a.s.\end{aligned}\tag{5.1$'$}$$

下面引进常微辅助系统：

$$u'=g(u,t),\qquad u(t_0)=u_0\geqslant 0。\tag{5.2}$$

这里假设

(a_1). $g\in C[E^+_m\times E_1^+,E_m]$且 $g(u,t)$ 对每一 $t\in E_1^+$ 关于 u 为拟单调非降的凹函数$(m<l)$.

(a_2). $r(t,u_0,t_0)$为(5.2)存在于$t\geqslant t_0$的最大解。

$\rho(t,u_0,t_0)$为(5.2)存在于 $t\geqslant t_0$ 的最小解。

§5.1 Itô 型随机微分不等式与比较定理

一、基本比较定理

这里所给出的基本比较定理是后面建立Itô方程的随机

稳定性、p 稳定性、指数稳定性以及不稳定性等比较准则的基础。其取自胡宣达等[1],[4],[8].

记 $\tau_{t_0}(\alpha)$ 为(5.1)解过程 $X(t)$ 自 t_0 以后关于集 $U(\alpha)$ 的首出时，已知 $\tau_{t_0}(\alpha)$ 为一停时，且 $t\varLambda\tau_{t_0}(\alpha)=\min(t,\tau_{t_0}(\alpha))$ 也为一个停时。同时 $X(t)$ 的停止过程 $\widetilde{X}(t)=X(t\varLambda\tau_{t_0}(\alpha))$ 也是一个连续的 Markov 过程。

设函数 $V\in C[E_l\times E_1^+,E_m^+]$，类似于第 2 章，令

$$L^*V(X,t)=\frac{\partial V}{\partial X}b(X,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}(X,t),\tag{5.3}$$

这里
$$a_{ij}=\sum_{h=1}^{k}\sigma_{ih}\sigma_{jh}.$$

定理 5.1（停止过程的比较定理 I）　假设存在一个满足下列条件的函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),V_2(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T;$$

(H_1). $V\in C[U(\rho)\times E_1^+,E_m^+]$，$V_t,V_X,V_{XX}$，对于
$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1$$
存在且连续；

(H_2). $g(V(X,t),t)-\dfrac{\partial V}{\partial t}\geqslant 0$，$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$；

(H_3). $\dfrac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\leqslant g(V(X,t),t)$，
$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+.$$

则对任一 $\rho'<\rho$，由 $V(X_0,t_0)\leqslant u_0$，就有
$$E_{X_0t_0}V(\widetilde{X}(t),t)\leqslant r(t,u_0,t_0),\ t\geqslant t_0.\tag{5.4}$$
这里 $\widetilde{X}(t)=X(t\varLambda\tau_{t_0}(\rho'))$ 且 $X_0\in U(\rho')$.

【证明】　由于(5.1)的解过程$X(t)$的停止过程$X(t)$也是

连续的 Markov 过程。令

$$W^*(t) \triangleq \max_{|X|\leq\rho} V(X,t),$$

则对任一 $t \geq t_0$, $W^*(t)$ 存在有限，而且

$$V(\widetilde{X}(t),t) \leq W^*(t), \quad a.s.$$

故 $E_{X_0t_0}V(\widetilde{X}(t),t)$ 存在。现置

$$m(t) \triangleq E_{X_0t_0}V(\widetilde{X}(t),t), \quad m(t_0) \triangleq V(X_0,t_0),$$

显然 $m(t) \in C[E_1^+, E_m^+]$。由 Dynkin[14]的定理 11.6 知，在条件(A_1),(A_2)下，停止过程 $\widetilde{X}(t)$ 是下列随机积分方程的解：

$$\widetilde{X}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \chi_{(\tau_{t_0}>s)}(\omega) \cdot b(\widetilde{X}(s),s)ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \chi_{(\tau_{t_0}>s)}(\omega) \cdot \sigma(\widetilde{X}(s),s)dW(s).$$

这里及下面的 $\tau_{t_0}(\rho')$ 均简记为 τ_{t_0}.

由于 $\widetilde{X}(t)$ 也是一个连续的 Markov 过程，并由条件(H_1)及 Itô 微分公式，有

$$dV(\widetilde{X}(t),t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \Big(\frac{\partial V}{\partial \widetilde{X}} \chi_{(\tau_{t_0}>t)}(\omega) \cdot b(\widetilde{X},t),t)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial^2 V}{\partial \widetilde{x}_i \partial \widetilde{x}_j} \chi_{(\tau_{t_0}>t)}(\omega) \cdot a_{ij}(\widetilde{X}(t),t) \Big)dt$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial \widetilde{X}} \chi_{(\tau_{t_0}>t)}(\omega) \cdot \sigma(\widetilde{X}(t),t)dW(t).$$

于是由(5.3)我们有

$$V(\widetilde{X}(t),t) = V(X_0,t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial V}{\partial s} ds + \int_{t_0}^{t} \chi_{(\tau_{t_0}>t)}(\omega)$$

$$\times L^*V(\widetilde{X}(s),s)ds+\int_{t_0}^{t}\chi_{(\tau_{t_0}>t)}(\omega)\cdot\frac{\partial V}{\partial\widetilde{X}}$$

$$\times\sigma(\widetilde{X}(s),s)dW(s),\quad t\geqslant t_0.$$

由条件(H_1)知，$V_X(X,s)$在$\bar{U}(\rho')\times[t_0,t]$上连续 故必存在一个常数$K>0$，使得$|V_X(X,s)|\leqslant K$，对于$(X,s)\in\overline{U}(\rho')\times[t_0,t]$，再由$\sigma(X,s)$的线性有界性（见条件($A_2$)），我们有

$$\|V_X(X,s)\sigma(X,s)\|\leqslant\|V_X(X,s)\|\|\sigma(X,s)\|$$
$$\leqslant KL(1+|X|)\leqslant KL(1+\rho'),$$

对于

$$(X,s)\in\overline{U}(\rho')\times[t_0,t].$$

由引理 2.3（或由 Friedman[12] 定理 4.2.8)有

$$E_{X_0t_0}\int_{t_0}^{t}\chi_{(\tau_{t_0}>s)}(\omega)\cdot\frac{\partial V}{\partial\widetilde{X}}\sigma(\widetilde{X}(s),s)dW(s)=0,\qquad(5.5)$$

于是有

$$m(t)=m(t_0)+E_{X_0t_0}\Big(\int_{t_0}^{t}\frac{\partial V}{\partial s}ds+\int_{t_0}^{t}\chi_{(\tau_{t_0}>s)}(\omega)$$
$$\times L^*V(\widetilde{X}(s),s)ds\Big).$$

对$\forall h>0$，则有

$$m(t+h)-m(t)=E_{X_0t_0}\Big(\int_{t}^{t+h}\frac{\partial V}{\partial s}ds+\int_{t}^{t+h}\chi_{(\tau_{t_0}>s)}(\omega)$$
$$\times L^*V(\widetilde{X}(s),s)ds\Big)$$
$$\leqslant E_{X_0t_0}\Big\{\int_{t}^{t+h}\frac{\partial V}{\partial s}ds+\int_{t}^{t+h}\chi_{(\tau_{t_0}>s)}(\omega)$$
$$\times\Big(g(V(\widetilde{X}(s),s)-\frac{\partial V}{\partial s}\Big)ds\Big\}$$

$$\leqslant \int_t^{t+h} E_{X_0 t_0} \frac{\partial V}{\partial s} ds + \int_t^{t+h} E_{X_0 t_0} [g(V(\widetilde{X}(s), s), s) - \frac{\partial V}{\partial s}] ds$$

$$= \int_t^{t+h} E_{X_0 t_0} g(V(\widetilde{X}(s), s) ds, s) \quad (\text{由 } g \text{ 关于 } u \text{ 的凹性})$$

$$\leqslant \int_t^{t+h} g(m(s), s) ds.$$

从而由 $g(u,t)$ 及 $m(t)$ 的连续性，我们有

$$D^+ m(t) = \limsup_{h \to 0^+} \left\{ \frac{m(t+h) - m(t)}{h} \right\}$$

$$\leqslant \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(m(s), t) ds$$

$$= g(m(t), t).$$

于是我们导出微分不等式：

$$D^+ m(t) \leqslant g(m(t), t), \quad t \geqslant t_0.$$

再由 $m(t_0) = V(X_0, t_0) \leqslant u_0$ 及定理 4.9 的推论得

$$E_{x_0 t_0} V(\widetilde{X}(t), t) = m(t) \leqslant r(t, u_0, t_0), \quad t \geqslant t_0. \quad ∎$$

由定理 4.9 的注，我们不难得到下面的定理。

定理 5.2（停止过程的比较定理 II） 假设存在一个满足下列条件的函数

$$V(X, t) = (V_1(X, t), \cdots, V_m(X, t))^T$$

(H_1). $V \in C[U(\rho) \times E_1^+, E_m^+]$, V_t, V_X, V_{XX} 对于 $(X, t) \in U(\rho) \times E_1^+$ 存在且连续.

(H_2'). $g(V(X, t), t) - \frac{\partial V}{\partial t} \leqslant 0, (X, t) \in U(\rho) \times E_1^+$.

(H_3'). $\frac{\partial V}{\partial t} + L^* V(X, t) \geqslant g(V(X, t), t),$

$$(X, t) \in U(\rho) \times E_1^+.$$

则对任一 $\rho' < \rho$，由 $V(X_0, t_0) \geqslant u_0$，就有

$$E_{X_0t_0}V(X(t),t)\geqslant\rho(t,u_0,t_0),\quad t\geqslant t_0.$$

定理 5.3（非停止过程的比较定理 I） 假设存在一个满足下列条件的函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T,$$

(H_1^*). $V\in C[E_l\times E_1^+,E_m^+]$，$V_t,V_X,V_{XX}$存在且连续，对于

$$(X,t)\in E_l\times E_1^+.$$

(H_2^*). 对任一$T>t_0$，有

$$V_X(X(t),t)\sigma(X(t),t)\in M_W^2[t_0,T].$$

(H_3^*). $\dfrac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\leqslant g(V(X,t),t)\leqslant 0,$

$$(X,t)\in E_l\times E_1^+.$$

则由 $V(X_0,t_0)\leqslant u_0$，就有

$$E_{X_0t_0}V(X(t),t)\leqslant r(t,u_0,t_0)\quad t\geqslant t_0.$$

【证明】 由条件(H_2^*)及 Friedman[12]的定理 4.2.5，对任一 $t\geqslant t_0$，有

$$E_{X_0t_0}\int_{t_0}^{t}V_X(X(s),s)\sigma(X(s),s)dW(s)=0.$$

从而再由条件(H_3^*)及 $\hat{\text{Ito}}$积分公式，对任一 $t\geqslant t_0$，有

$$\begin{aligned}0\leqslant E_{X_0t_0}V(X(t),t)&=V(X_0,t_0)\\&+E_{X_0t_0}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial V}{\partial s}+L^*V(X(s),s)\right)ds\\&\leqslant V(X_0,t_0)+E_{X_0t}\int_{t_0}^{t}g(V(X(s),s),s)ds\leqslant V(X_0,t_0).\end{aligned}$$

故推得 $E_{X_0t_0}V(X(t),t)$ 对任一$t>t_0$ 及任一$X_0\in E_l$ 存在。令

$$m(t)=E_{X_0t_0}V(X(t),t),\quad m(t_0)=V(X_0,t_0).$$

显然 $m(t)\in C[E_1^+,E_m^+]$，由条件(H_2^*)及(H_3^*)以及$\hat{\text{Ito}}$积分

公式，对充分小的 $h>0$，我们有

$$m(t+h)-m(t)=E_{X_0t_0}\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial V}{\partial s}+L^*V(X(s),s)\right)ds$$

$$\leqslant E_{X_0t_0}\int_t^{t+h}g(V(X(s),s),s)ds$$

$$\leqslant\int_t^{t+h}g(m(s),s)ds.$$

剩下的证明就完全与定理 5.1 的证明最后部分相同，这里不再重复。 ∎

完全与定理 5.2 类似，我们有定理 5.4.

定理 5.4（非停止过程的比较定理 Ⅱ） 假设存在一个满足下列条件的函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T;$$

(H_1^*). $V\in C[E_l\times E_1^+,E_m^+]$, V_t, V_X, V_{XX} 存在且连续，对于 $(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

(H_2^*). 对任一 $T>t_0$，有

$$V_X(X(t),t)\sigma(X(t),t)\in M_{lp}^2[t_0,T].$$

(H_3^{**}). $\frac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\geqslant g(V(X,t),t)$,

$$(X,t)\in E_l\times E_1^+.$$

(H_4^*). 对于(5.1)的解过程 $X(t)$，$E_{X_0t_0}V(X(t),t)$ 存在，对于 $t\geqslant t_0$.

则由 $V(X_0,t_0)\geqslant u_0$，就有

$$E_{X_0t_0}V(X(t),t)\geqslant\rho(t,u_0,t_0),\quad t\geqslant t_0.$$

类似于定理 4.25，我们不难得到定理 5.1，定理 5.3 的变形，然而我们不再在这里赘述了，有兴趣的读者详见胡宣达等[1].

二、随机微分不等式

这一段及下一段的结果，均取自 Ladde 等[10]，[11]。在后面的讨论中，下面的引理起着重要的作用。

引理 5.5 假设

(i) $m(t)$ 是

$$dm = g(m,t)dt + G(m,t)dW(t), \quad m_0(t) = m_0.$$

的一个解过程。这里 $g, G \in C[E_1 \times E^+_1, E_1]$ 並且 $W(t)$ 为标准 Wiener 过程。

(ii) $|G(u,t)|^2 \leqslant h(|u|)$ 对于 $(u,t) \in E_1 \times E_1^+$，

这里 $h \in \mathscr{K}$ 並且

$$\int_{0+} \frac{ds}{h(s)} = \infty,$$

则我们有

$$E(|m(t)|) \leqslant E(|m_0|) + E\left(\int_{t_0}^{t} |g(m(s),s)|ds\right), \quad t \geqslant t_0.$$

【证明】 当 $a_0 = 1 > a_1 > \cdots > a_n \longrightarrow 0$ 当 $n \to \infty$ 时，定义

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{ds}{h(s)} = n, \quad 对于\ n = 1, 2, \cdots$$

则在 E_1 上存在一个二次连续可微函数 $H_n(u)$，使有

$$H_n(0) = 0.$$

$$H'_n(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant u \leqslant a_n \\ 0\ 与\ 1\ 之间 & a_n < u < a_{n-1} \\ 1 & u \geqslant a_{n-1} \end{cases}$$

並且

$$H''_n(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant u \leqslant a_n \\ 0\ 与\ \dfrac{2}{nh(u)}\ 之间 & a_n < u < a_{n-1} \\ 0 & u \geqslant a_{n-1} \end{cases}$$

然后，我们对称地延拓 $H_n(u)$ 到 $(-\infty,\infty)$，即

$$H_n(u)=H_n(|u|).$$

显然，$H_n(u)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是二次连续可微函数，並且当 $n\to\infty$ 时，$H_n(u)\longrightarrow|u|$.

利用 Itô 公式，我们得到

$$\begin{aligned}H_n(m(t))&=H_n(m_0)+\int_{t_0}^{t}H_n'(m(s))G(m(s),s)dW(s)\\&\quad+\int_{t_0}^{t}H_n'(m(s))g(m(s),s)ds\\&\quad+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}H_n''(m(s))[G(m(s),s)]^2ds\\&=H_n(m_0)+I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

显然 $E(I_1)=0$. 因为 $|H_n'(u)|\leqslant1$，我们有

$$E(|I_2|)\leqslant E\left(\int_{t_0}^{t}|g(m(s),s)|ds\right),\quad t\geqslant t_0.$$

並且 $E(|I_3|)\leqslant\frac{1}{2}E\left(\int_{t_0}^{t}H_n''(|m(s)|)h(|m(s)|)ds\right)$

$$\leqslant\frac{1}{2}(t-t_0)\max_{a_n\leqslant u\leqslant a_{n-1}}H_n''(u)h(u)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(t-t_0)\frac{2}{n}\longrightarrow0,\quad 当\ n\to\infty\ 时.$$

因此，我们得到

$$E(|m(t)|)\leqslant E(|m_0|)+E\int_{t_0}^{t}|g(m(s),s)|ds,\quad t\geqslant t_0 \quad ■$$

引理 5.5推广到Itô 型微分方程系统时，将需要推导每个分量的估计。这里我们仅叙述此情形下的结果，因为它的证明是类似的。

正如通常两个向量之间的不等式是理解为每个分量之间

的不等式一样，如果 $m\in E_l$，我们采用符号

$$|m|\triangleq(|m_1|,|m_2|,\cdots,|m_l|)^T.$$

引理 5.6 假设

(i) $m(t)$ 是 Itô 系统：

$$dm=g(m,t)dt+G(m,t)dW(t),m(t_0)=m$$

的一个解过程。其中

$$g\in C[E_l\times E_1^+,E_l],\quad G\in C[E_l\times E_1^+,E_{lk}],$$

$W(t)$ 为 k 维的标准 Wiener 过程。

(ii) $\sum_{j=1}^{k}|G_{ij}(u,t)|^2\leqslant h_i(|u_i|)$ 对于 $(u,t)\in E_l\times E_1^+$，

这里对每一 $i=1,2,\cdots,l$，$h_i\in\mathscr{K}$，並且

$$\int_0\frac{ds}{h_i(s)}=\infty,$$

则有

$$E[|m(t)|]\leqslant E[|m_0|]+E\left(\int_{t_0}^{t}|g(m(s),s)|ds\right),t\geqslant t_0.$$

定义 5.5 函数 $g\in C[E_l\times E_1^+,E_l]$，对每一 $t\in E_1^+$ 是称为关于 u 是**严格拟正的**，如果 $u\geqslant0$ 且 $u_i=0$，就有 $g_i(u,t)>0$，对每一 $t\in E_1^+$.

现在我们先来证明下面的关于 Itô 系统解的非负性结果，此结果在证明微分不等式的定理中是一个有用的工具。

定理 5.7 让引理 5.6 的假设成立，进而假设 $g(u,t)$ 对每一 $t>t_0$ 关于 u 是严格拟正的，则由

$$m(t_0)=m_0\geqslant0\Rightarrow m(t)\geqslant0,\ a.s.\ 对于\ t\geqslant t_0.$$

【证明】 让 ∂E_l^+ 记为 E_l^+ 的边界。对任一 $m_0\in\partial E_l^+$，我们可找到一个 $I=\{1,2,\cdots,l\}$ 的非空指标子集 I_0，其依赖于

m_0，使得对于 $i\in I_0$ 有 $m_{0i}=0$，$a.s.$ 并且对于 $i\in I\setminus I_0$，有$m_{0i}>0, a.s.$。首先证明：

p\{存在一个 $t>t_0$：$m(s)\geqslant 0$，对于 $s\in[t_0,t]$\}$=1$，　(5.6)

为了证明这一点，置

$$\tau_0=\inf \bigcup_{i\in I_0}\{s: g_i(m(s),s)\leqslant 0\},$$

且

$$\tau_1=\inf \bigcup_{i\in I\setminus I_0}\{s: m_i(s)<0\}.$$

由于 g 关于 u 的拟正性，$g_i(m_0,t)>0$ 对于 $i\in I_0, t>t_0$，由此以及 g 的连续性和 $m(t)$ 的 $a.s.$ 连续性，可得 $p\{\tau>t_0\}=1$。这里 $\tau=\min(\tau_0,\tau_1)$。

让 $T>t_0$ 固定，并令 $t=\min(\tau,T)$，则对于 $i\in I_0$ 我们得到

$$E(m_i(t))=E\left(\int_{t_0}^t g_i(m(s),s)\,ds\right).\qquad(5.7)$$

因为$t\leqslant\tau$，易见$g_i(m(s),s)\geqslant 0$，对于 $s\in[t_0,t]$，以及对于每一 $i\in I_0$。因此对每一 $i\in I_0$，由引理5.6有

$$E(|m_i(t)|)\leqslant E(|m_{0i}|)+E\left(\int_{t_0}^t g_i(m(s),s)ds\right),$$

由此以及(5.7)和 $m_{0i}(t)=0$，我们有

$$E(|m_i(t)|)\leqslant E(m_i(t)).$$

这意味着对于 $i\in I_0, m_i(t)\geqslant 0, a.s.$ 再由 τ,τ_1 的定义和 m_{0i}的性质有 $m_i(t)\geqslant 0, a.s.$ 对于 $i\in I\setminus I_0$，从而有 $m(t)\geqslant 0$，$a.s.$ 因为这对于所有 $t=\min(\tau,T)$ 是正确的，再由 $m(t)$的 $a.s.$ 连续性，表明

$$p\{t\in[t_0,\tau]\Rightarrow m(t)\geqslant 0\}=1,$$

这就证明了(5.6)式。

为了证明对于所有 $t\geqslant t_0$，有 $m(t)\geqslant 0$，$a.s.$ 我们让

$$t_1=\inf\bigcup_{i=1}^{l}\{s: m_i(s)<0\},$$

可以证明：$t_1=\infty$, $a.s.$ 假若不然，设 $p\{t_1<\infty\}>0$，令

$$\Omega^*=\{\omega: t_1(\omega)<\infty\}, \widetilde{\mathscr{N}}_t^*=\widetilde{\mathscr{N}}_{t+t_1-t_0}\cap\Omega^*, \mathscr{U}^*=\mathscr{U}\cap\Omega^*,$$

并且

$$p^*(A)=p(A)/p((\Omega^*), \quad A\in\mathscr{U}^*.$$

在空间$(\Omega^*,\mathscr{U}^*,p^*)$上，我们看到

$$G^*(u,t)=G(u,t+t_1-t_0),$$

$$g^*(u,t)=g(u,t+t_1-t_0),$$

$$m^*(t)=m(t+t_1-t_0).$$

并且

$$W^*(t)=W(t+t_1-t_0).$$

从而推得

$$m^*(t_0)=m(t_1)\in\partial E_l^+, \quad a.s.$$

并且

$$dm^*=g^*(m^*,t)dt+G^*(m^*,t)dW^*(t), \qquad m^*(t_0)=m_0^*.$$

现在利用(5.6)式得到

$$p^*\{存在一个\ t>t_0:\ m^*(s)\geqslant 0,\ 对于\ s\in[t_0,t]\}=1.$$

但这与 t_1 的定义矛盾！因此 $t_1=\infty$, $a.s.$ 并且对于 $t\geqslant t_0$，有 $m(t)\geqslant 0, a.s.$ 只要 $m_0\in\partial E_l'$.

为了完成该定理的证明，需要表明，如果

$$m_0\in E_l^+\setminus\partial E_l^+,$$

则 $m(t)\geqslant 0, a.s.$ 对于 $t\geqslant t_0$，为了表明这一点，令

$$t_1=\inf\bigcup_{i=1}^{l}\{s: m_i(s)<0\}.$$

並通过利用类似于上面的方法，我们可以得到与t_1 的定义相矛盾的结论。从而定理证毕。 ■

推论 5.8 若保证Itô系统解的唯一性，则对于$t>t_0$，g的严格拟正性减弱为拟非负性时，定理 5.7 的结论仍然成立。

【证明】 让 $\varepsilon>0$，并让 $m(t,\varepsilon)$ 为

$$dm=[g(m,t)+\varepsilon]dt+G(m,t)dW(t),\quad m(t_0,\varepsilon)=m_0+\varepsilon$$

的一个解。由定理 5.7，$m(t,\varepsilon)\geqslant 0, a.s.$ 对于 $t\geqslant t_0$。现在解的唯一性意味着 $m(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}m(t,\varepsilon)\geqslant 0$, $a.s.$ 对于 $t\geqslant t_0$. ∎

下面证明关于随机微分不等式的一些结果。

定理 5.9 假设

(i) $f\in C[E_l\times E_1^+,E_l]$，$F\in C[E_l\times E_1^+,E_{lk}]$

$W(t)$ 为 k 维标准 Wiener 过程。并且对每一 t，$f(X,t)$ 关于 X 是拟单调非降的。

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{k}|F_{ij}(u,t)-F_{ij}(v,t)|^2\leqslant h_i(|u_i-v_i|)$

$(u,t),(v,t)\in E_l\times E_1^+$. 其中对每一 $i=1,2,\cdots,l$, $h_i\in\mathscr{K}$

并且 $$\int_0 ds/h_i(s)=\infty.$$

(iii) $u(t),v(t)$ 分别为

$$du=\beta_1(t)dt+F(u,t)dW(t),\quad u(t_0)=u_0,$$

和

$$dv=\beta_2(t)dt+F(v,t)dW(t),\quad v(t_0)=v_0,\quad t\geqslant t_0$$

的解，使得 $\beta_1(t)\leqslant f(u(t),t)$ 和 $\beta_2(t)\geqslant f(v(t),t)$ 这两个不等式中的一个是严格的。

则由 $u_0\leqslant v_0\Rightarrow u(t)\leqslant v(t), t\geqslant t_0, a.s.$

【证明】 置 $m(t)=v(t)-u(t)$，所以

$$dm=q(m,t)dt+G(m,t)dW(t),\tag{5.8}$$

这里 $$G(m,t)=F(u+m,t)-F(u,t);$$

$$g(m,t)=f(u+m,t)-f(u,t)+q(t);$$

$$q(t)=\beta_2(t)-f(v,t)-\beta_1(t)+f(u,t).$$

由 $f(X,t)$ 关于 X 的拟单调性推得 $g(X,t)$ 关于 X 是拟单调

的。此外，如果 $\beta_2(t)\geqslant f(v(t),t)$ 和 $\beta_1(t)\leqslant f(u(t),t)$ 中有一个是严格的。易见 $g(X,t)$，对于 $t>t_0$，关于 X 是严格拟正的。鉴于假设(ii)，$G(m,t)$ 满足引理 5.6 的条件(ii)，因此由定理 5.7，我们得到 $m(t)\geqslant 0$，$a.s.$ 对于 $t\geqslant t_0$. ∎

推论 5.10 如果忽略定理5.9中的不等式:

$$\beta_2\geqslant f(v,t),\quad \beta_1\leqslant f(u,t)$$

中有一个是严格的，並且假设 (5.8) 的解唯一，则定理的结论仍然成立。

定理 5.9 的下面形式，对于以后的讨论是更合适的，但为了节省篇幅，我们只叙而不证。

定理 5.11 假设

(i) $u(t),v(t)$ 分别为

$$du=f_1(u,t)dt+F(u,t)dW(t),\quad u(t_0)=u_0,$$

$$dv=f_2(v,t)dt+F(v,t)dW(t),\quad v(t_0)=v_0,\quad t\geqslant t_0$$

的解。这里 f_1，$f_2\in C[E_l\times E_1^+,E_l]$，$F\in C[E_l\times E_1^+,E_{lk}]$ $W(t)$ 为 k 维的标准 Wiener 过程. $f_2(X,t)$ 对每一 t，关于 X 是拟单调非降的，並且 $f_1(X,t)<f_2(X,t)$.

(ii) 保持定理 5.9 的条件(ii)。则

$$u_0\leqslant v_0\Rightarrow u(t)\leqslant v(t)\ .\ a.s.\qquad t\geqslant t_0.$$

定理 5.9 和 5.11 中所包含的结果，实质隐含着关于微分不等式的定理。例如，鉴如假设(iii)，显然 u,v 满足

$$du\leqslant f(u,t)dt+F(u,t)dW(t),$$

$$dv\geqslant f(v,t)dt+F(v,t)dW(t).\tag{5.9}$$

从而定理 5.9 是意味着关于随机微分不等式的结果。遗憾的是由(5.9)出发，如同通常那样，就不可能去证明定理5.9的结论。

三、随机比较定理

1. 最大解与最小解

下面我们引进关于 Itô 微分系统：

$$dX = b(X,t)dt + \sigma(X,t)dW(t), X(t_0) = X_0(\omega) \quad (5.10)$$

的最大和最小解的概念。这里

$$b \in C[E_l \times J, E_l], \quad \sigma \in C[E_l \times J, E_{lk}].$$

$W(t)$ 为 k 维标准 Wiener 过程，$J = [t_0, t_0 + a)$。

让我们先定义类似于确定性情形的极值解。

定义 5.6 让 $r(t)$ 为(5.10)在 J 上的一个解，则 $r(t)$ 是称为(5.10)的最大解，如果对每存在于 J 上的解 $X(t)$，不等式

$$X(t) \leqslant r(t), \quad t \in J, \quad a.s. \quad (5.11)$$

成立。

最小解通过(5.11)的反向不等式类似地定义。

定理 5.12（最大解与最小解存在定理） 假设

(H_1). 存在正数 L 和 M，使得

$|b(X,t)| + \|\sigma(X,t)\| \leqslant L + M|X| \quad (X,t) \in E_l \times J$.

(H_2). $X_0(\omega)$ 独立于 $W(t)$，并且 $E|X_0(\omega)|^4 \leqslant C_1$，

对于某个常数 $C_1 > 0$.

(H_3). (a). $b(X,t)$ 对每 t，关于 X 是拟单调非降的。

$$\text{(b)}. \sum_{j=1}^{k} |\sigma_{ij}(X,t) - \sigma_{ij}(Y,t)|^2 \leqslant h_i(|x_i - y_i|)$$

$$(X,t), (Y,t) \in E_l \times J.$$

这里，对每一 i，$h_i \in \mathscr{K}$，并且 $\int_{0+} ds/h_i(s) = \infty$. 则(5.10)在 J 上存在最大和最小解。

【证明】 我们只证明最大解的存在性，因为最小解的情

形是完全类似的。

让 $\varepsilon>0$，使得 $|\varepsilon|\leqslant L$，並考虑问题

$$dX=[b(X,t)+\varepsilon]dt+\sigma(X,t)dW(t),$$
$$X(t_0,\varepsilon)=X_0+\varepsilon. \tag{5.12}$$

heavy易，以 $2L$ 来替代 L，对于(5.12)，解的存在定理的条件满足，因此，在 J 上存在 (5.12) 的一个解 $X(t,\varepsilon)$. 让 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon$，並且让 $X_1=X(t,\varepsilon_1)$，$X_2=X(t,\varepsilon_2)$ 分别为

$$dX_1=[b(X_1,t)+\varepsilon_1]dt+\sigma(X_1,t)dW(t),$$
$$X_1(t_0)=X_0+\varepsilon_1,$$

和

$$dX_2=[b(X_2,t)+\varepsilon_2]dt+\sigma(X_2,t)dW(t),$$
$$X_2(t_0)=X_0+\varepsilon_2$$

的解。于是利用定理 5.11，有

$$X(t,\varepsilon_1)\leqslant X(t,\varepsilon_2),\quad t\in J,\ a.s.$$

选取递降序列 $\{\varepsilon_k\}$，使当 $k\to\infty$ 时，$\varepsilon_k\to 0$. 则显然 $\{X(t,\varepsilon_k)\}$ 亦是一个递降序列，于是在 J 上存在一致极限：

$$r(t)=\lim_{k\to\infty}X(t,\varepsilon_k),\ a.s.$$

显然 $r(t_0)=X_0$，现在需要证明 $r(t)$ 满足 (5.10). 为此，令

$$Y(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}b(r(s),s)ds+\int_{t_0}^{t}\sigma(r(s),s)dW(s).$$

让 $J_0=[t_0,t_0+a_0]\subset J$，于是推得当 $k\to\infty$时，在 J_0 上一致有

$$b(X(t,\varepsilon_k),t)\longrightarrow b(r(t),t),$$
$$\sigma(X(t,\varepsilon_k),t)\longrightarrow\sigma(r(t),t).$$

鉴于此並通过某些运算，我们可得到下列估计：

$$E[|X(t,\varepsilon_k)-Y(t)|^2]\leqslant 3(t-t_0)E[\int_{t_0}^{t}|b(X(s,\varepsilon_k),s)$$

$$- b(r(s), s)|^2 ds] + 3\int_{t_0}^{t} E[\|\sigma(X(s,\varepsilon_k), s) - \sigma(r(s), s)\|^2] ds + 3\varepsilon_k^2 < \varepsilon^3,$$

对于 $k \geq k_0, t \in J_0$.

从而由 чебышев 不等式，推得在 J_0 上有

$$P\{|X(t,\varepsilon_k) - Y(t)| > \varepsilon\} < \varepsilon, \text{ 对于 } k \geq k_0.$$

其意味着在 J_0 上有 $X(t,\varepsilon_k) \longrightarrow Y(t)$, $a.s.$ 当 $k \to \infty$ 时。这就证明了 $r(t)$ 是(5.10)在J上的一个解。

现在我们需要证明 $r(t)$ 就是所要求的(5.10)的最大解。让 $X(t)$ 为(5.10)在 J 上的任一解，则利用定理 5.11 在 J 上有 $X(t) \leq X(t,\varepsilon_k)$, $a.s.$ 从而在 J 上有

$$X(t) \leq \lim_{k \to \infty} X(t,\varepsilon_k) \equiv r(t), \quad a.s.$$

这就证明了此定理。

2．随机比较定理

定理 5.13 假设

(i) $r(t)$ 为(5.10)在J上的最大解；

(ii) $m(t)$ 为

$$dm = \beta(t)dt + \sigma(m,t)dW(t), \quad m(t_0) = m_0$$

在 J 上的一个解。

这里 $\beta(t) \leq b(m(t), t)$，並且对每一 t, $b(X, t)$ 关于 X 是拟单调非降的。

(iii) 定理 5.12 的条件 $H_3(b)$ 成立

则在 J 上由 $m_0 \leq X_0 \Rightarrow m(t) \leq r(t)$, $a.s.$

【证明】 让 $X(t,\varepsilon)$ 为

$$dX = [b(X,t) + \varepsilon]dt + \sigma(X,t)dW(t), X(t_0,\varepsilon) = X_0 + \varepsilon$$

的任一解，对于充分小的 $\varepsilon > 0$. 利用定理 5.11，在 J 上有

$$m(t) \leqslant X(t, \varepsilon), \ a.s.$$

因为在 J 上，有 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} X(t, \varepsilon) = r(t)$． ∎

推论 5.14 在定理 5.13 中，如果不等式

$$\beta(t) \leqslant b(m(t), t)$$

反向，则定理的结论改为

$$m(t) \geqslant \rho(t), \ a.s. \ 在 J 上.$$

这里 $\rho(t)$ 为(5.10)的最小解。

定理 5.15 假设

(i) $V \in C[E_l \times E_1^+, E_m]$ $(m < l)$，V_t，V_X，和 V_{XX} 存在且连续，对于 $(X, t) \in E_l \times E_1^+$．并且对于 $(X, t) \in E_l \times E_1^+$ 有

$$dV(X, t) = \alpha(X, t) dt + G(V(X, t), t) dW(t) \qquad (5.13)$$

这里 $\alpha \in C[E_l \times E_1^+, E_m]$， $g \in C[E_m \times E_1^+, E_m]$．

$$G \in C[E_m \times E_1^+, E_{mk}], \quad \alpha(X, t) \leqslant g(V(X, t), t).$$

並且 $\alpha(X, t) = LV(X, t)$．

(ii) (a)．$g(u, t)$ 对每一 t，关于 u 是拟单调非降的。

(b)．$\displaystyle\sum_{j=1}^{k} |G_{ij}(u, t) - G_{ij}(v, t)|^2 \leqslant h_i(|u_i - v_i|)$，

$$(u, t), (v, t) \in E_m \times E_1^+.$$

这里 $h_i \in \mathscr{K}$ 並且 $\displaystyle\int_{0+} \frac{ds}{h_i(s)} = \infty$，$i = 1, 2, \cdots, m$．

(iii) $r(t) = r(t, u_0, t_0)$ 为 Itô 随机辅助微分系统：

$$du = g(u, t) dt + G(u, t) dW(t) \qquad (5.14)$$

存在于 $t \geqslant t_0$ 的最大解。

(iv) $X(t) = X(t, X_0, t_0)$ 为(5.10)的解过程，其使得

$$V(X_0, t_0) \leqslant u_0, \ a.s. \qquad (5.15)$$

则

$$V(X(t),t) \leqslant r(t,u_0,t_0), a.s. \quad t \geqslant t_0. \qquad (5.16)$$

【证明】 让 $X(t)$ 为对于 $t \geqslant t_0$ 定义的 (5.10) 的解过程，其使得 (5.15) 成立。定义 $m(t) = V(X(t),t)$. 所以 $m(t_0) \leqslant u_0$，由此以及 (5.13) 有

$$dm(t) = \beta(t)dt + G(m(t),t)dW(t),$$

这里 $$\beta(t) \equiv \alpha(X(t),t) = LV(X(t),t).$$

利用定理 5.13，我们即得所要求的结果 (5.16). ∎

§5.2 Itô 方程的条件随机稳定性

一、条件随机稳定性比较准则

下面为了方程 (5.1) 有解 $X(t) \equiv 0$，我们还假设

$$b(0,t) \equiv 0, \quad \sigma(0,t) \equiv 0, \quad \text{对于 } t \geqslant 0.$$

同样，对于辅助系统 (5.2) 我们也假设

$$g(0,t) \equiv 0, \quad t \geqslant 0.$$

这一假设也意味着 (5.2) 的解是非负的。

定义 5.7 随机系统 (5.1) 的平凡解 $X(t) \equiv 0$ 是称为

(CRS$_1$). **条件随机稳定的**，如果对每一 $\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0$，$t_0 \geqslant 0$，存在一正数 $\delta(t_0,\varepsilon,\varepsilon')$，使当 $X_0 \in \overline{U}(\delta) \cap M_{(l-h)}$ 时，就有 $P_{X_0t_0}\{|X(t)| < \varepsilon'$ 对于所有的 $t \geqslant t_0\} \geqslant 1-\varepsilon$. 这里 $M_{(l-h)}$ 为包含原点的 $(l-h)$ 维流形 $(h < l)$.

(CRS$_2$). **条件随机一致稳定的**，如果在 (CRS$_1$) 中的 δ 不依赖于 t_0.

(CRS$_3$). **条件随机拟渐近稳定的**，如果对每一 $\varepsilon > 0$，$\varepsilon' > 0$，$t_0 \geqslant 0$，存在两正数 $\delta_0(t_0)$ 和 $T = T(t_0,\varepsilon,\varepsilon')$，使当 $X_0 \in \overline{U}(\delta_0) \cap M_{(l-h)}$ 时，就有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)| < \varepsilon', \text{对于所有的 } t \geqslant t_0 + T\} \geqslant 1-\varepsilon.$$

(CRS_4)．**条件随机拟一致渐近稳定的**，如果在(CRS_3)中的 δ_0 及 T 与 t_0 无关。

(CRS_5)．**条件随机渐近稳定的**，如果(CRS_1)和(CRS_3)同时成立。

(CRS_6)．**条件随机一致渐近稳定的**，如果(CRS_2)和(CRS_4)同时成立。

对于常微辅助系统(5.2)，需要相应的条件等度稳定性的定义，(CS_1)—(CS_6)．

定义 5.8 辅助系统(5.2)的平凡解 $u=0$ 是称为

(CS_1)．**条件等度稳定的**，如果对每一 $\varepsilon\geqslant0$，$t_0\geqslant0$ 存在一正数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使当

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0}\leqslant\delta,\quad 且\ u_{i0}=0, i=1,2,\cdots,h\ 时，$$

就有

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(t,u_0,t_0)<\varepsilon,\quad t\geqslant t_0.$$

(CS_2)—(CS_6)可类似地定义。

〔注〕5.1．如果 $h=0$，则 $M_{(l-h)}=E_l$，于是我们的定义就化为(5.1)的解关于原点的通常随机稳定性的相应定义，以及辅助系统(5.2)的解关于原点的通常等度稳定性的相应定义．

下面我们来建立条件随机稳定性的比较准则。

定理 5.16 假设存在一个函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

除满足基本比较定理 5.1 中的条件(H_1)，(H_2)，(H_3)外，还满足条件：

(H_4)．$V_i(X,t)\equiv0, i=1,2,\cdots,h$，对于 $X\in M_{(l-h)}$．

(H_5)．$V(0,t)\equiv0$，並且 $\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(X,t)\geqslant b(X)$，

$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+,$$

这里 $b(X)\in\mathscr{PK}$.

则有$(CS_1)\Rightarrow(CRS_1)$.

【证明】 由(H_5)，存在一函数 $b(X)\in\mathscr{PK}$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}V_i(X,t)\geqslant b(X),\quad (X,t)\in U(\rho)\times E_1^+. \tag{5.17}$$

于是 $\forall\varepsilon>0, 0<\varepsilon'<\rho$ 和 $t_0\geqslant 0$，令

$$m^*(\varepsilon')=\min_{|Y|=\varepsilon'}b(Y),$$

由于(5.2)的解 $u\equiv 0$是条件等度稳定的，所以给定的$m^*(\varepsilon')\cdot\varepsilon>0$，总可找到一正数 $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon,\varepsilon')$，使当

$$\sum_{i=1}^{m}u_{i0}\leqslant\delta_1,$$

且 $u_{i0}=0, i=1,2,\cdots,h$ 时，对(5.2)的任一解都有

$$\sum_{i=1}^{m}u_i(t,u_0,t_0)<m^*\cdot\varepsilon,\ \ t\geqslant t_0. \tag{5.18}$$

现选取 $u_0=V(X_0,t_0)$，因 $V(X,t)$连续且$V(0,t)\equiv 0$，故存在一正数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon,\varepsilon')$，使当$|X_0|\leqslant\delta$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{m}u_{i0}=\sum_{i=1}^{m}V_i(X_0,t_0)<\delta_1.$$

令 $\tau_{t_0}(\varepsilon')$为系统(5.1)的解过程 $X(t)$自 t_0 以后关于集 $U(\varepsilon')$的首出时，$\widetilde{X}(t)=X(t\wedge\tau_{t_0}(\varepsilon'))$，从而有

$$E_{X_0t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(\widetilde{X}(t),t)\geqslant\int_{\{t>\tau_{t_0}(\varepsilon')\}}\sum_{i=1}^{m}V_i(\widetilde{X}(t),t)P_{X_0t_0}(d\omega)$$

$$=\int_{\{t>\tau_{t_0}(\varepsilon')\}}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(\tau_{t_0}(\varepsilon')),t)P_{X_0t_0}(d\omega).$$

因 $X(t)$ 为连续的 Markov 过程，再由(5.17)我们有

$$E_{X_0t_0}\sum_{i=1}^{m} V_i(\widetilde{X}(t),t) \geqslant \int_{\{t>\tau_{t_0}(\varepsilon')\}} b(X(\tau_{t_0}(\varepsilon')))P_{X_0t_0}(d\omega)$$

$$\geqslant m^* P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\varepsilon')<t\}. \qquad (5.19)$$

于是当$X_0\in\overline{U}(\delta)\cap M_{(t-h)}$时，由条件($H_4$)，基本比较定理5.1以及(5.18)，(5.19)，我们有

$$m^*\cdot P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\varepsilon')<t\} \leqslant \sum_{i=1}^{m} E_{X_0t_0}V_i(\widetilde{X}(t),t)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} r_i(t,u_0,t_0) < m^*\cdot\varepsilon,\ \ t\geqslant t_0.$$

即

$$P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\varepsilon')<t\}<\varepsilon. \qquad (5.20)$$

让$t\uparrow\infty$，由(5.20)我们得到$P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\varepsilon')<\infty\}\leqslant\varepsilon$，故当$X_0\in U(\delta)\cap M_{(t-h)}$时，就有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|<\varepsilon',\ 对于所有的\ t\geqslant t_0\}>1-\varepsilon,$$

这就证明了随机系统(5.1)的平凡解是条件随机稳定的。 ∎

推论 5.17 假设存在一个函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T,$$

除满足定理5.16的条件(H_1)及(H_4)，(H_5)外，而条件(H_2)，(H_3)分别以下列条件(H_2')，(H_3')来替代：

$$(H_2').\quad \frac{\partial V(X,t)}{\partial t}\leqslant 0,\quad (X,t)\in\overline{U}(\rho)\times E_1^+.$$

$$(H_3').\quad \frac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\leqslant 0,\ (X,t)\in\overline{U}(\rho)\times E_1^+.$$

则随机系统(5.1)的平凡解是条件随机稳定的。

只要注意到，由条件(H'_2)和(H'_3)可将常微辅助系统(5.2)化简为

$$u'=0,\ \ u(t_0)=u_0\geqslant 0,\ \ t_0\geqslant 0,$$

显然，该系统是条件一致稳定的，故由定理5.16即得此推论。

令 $h=0$，则 $M_{(l-h)}=E_l$，于是由注 5.1 及定理 5.16，我们不难建立利用向量 Ляпунов 函数来判定随机系统 (5.1) 的解关于原点的通常随机稳定性的比较准则，我们将其作为定理 5.16 的推论，简单的陈述如下：

推论 5.18 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

满足定理 5.16 中的条件 $(H_1),(H_2),(H_3),(H_5)$，则由辅助系统 (5.2) 平凡解的等度稳定性，就有随机系统 (5.1) 平凡解的随机稳定性。

显然，对于时齐系统 (5.1)′，不难得到相应于定理 5.16 及推论 5.17, 5.18 的结果。

定理 5.19 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

除满足定理 5.16 中的条件 (H_1)—(H_4) 外，条件 (H_5) 以下面的条件 (H_5') 来替代：

$$(H_5').\ b(X)\leqslant\sum_{i=1}^m V_i(X,t)\leqslant a(X),$$

$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+,$$

这里 $a(X),b(X)\in\mathscr{PK}$. 则有

$$(CS_2)\Rightarrow(CRS_2),$$

【证明】 根据定理 5.16 的证明，由于 (5.2) 的平凡解是条件一致稳定的，则在定理 5.16 的证明中的 δ_1 与 t_0 无关。另外，我们选取 $u_0=(u_{10},\cdots,u_{i0},\cdots,u_{m0})$ 时，除使得 $u_{i0}=0$，$i=1,2,\cdots,h$, $u_0=V(X_0,t_0)$ 外，并且在这里必然有

$$\sum_{i=1}^m u_{i0}=\sum_{i=1}^m V_i(X_0,t_0)\leqslant a(X_0).$$

因 $a(X)\in\mathscr{PK}$，则存在一个不依赖于 t_0 的 $\delta=\delta(\varepsilon,\varepsilon')<\varepsilon'$，使当 $|X_0|\leqslant\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0} = \sum_{i=1}^{m} V_i(X_0, t_0) \leqslant a(X_0) < \delta_1.$$

剩下的证明就与定理 5.16 完全相同。

同样，令 $h=0$，即可得到利用向量 Ляпунов 函数来判定随机系统(5.1)的解，关于原点的通常随机一致稳定性的比较准则。

[注]5.2 如果 $h=0$，$m=1$，则定理 5.16 和推论 5.17 以及定理 5.19 均化为纯量 Ляпунов 函数相应的比较准则。对于时齐系统(5.1)′的相应结果亦复如此(详见胡宣达等[1])。

二、条件随机渐近稳定性比较准则

基于停止过程的比较定理，类似于条件随机稳定性的比较准则，我们可建立条件随机渐近稳定性的比较准则（参考胡宣达等[1]），但在实际中去寻求满足定理 5.16 的“条件等度渐近稳定”的常微辅助系统，一般是较困难的。为此，我们基于非停止过程的比较定理 5.3，利用上鞅不等式来建立条件随机渐近稳定性的比较准则。

在给出条件随机渐近稳定性比较准则前，我们先证明一个引理。

引理 5.20 假设存在一个函数

$$V(X,t) = (V_1(X,t), \cdots, V_m(X,t))^T$$

除满足定理 5.3 中的条件 (H_1^*)，(H_2^*)，(H_3^*) 外，还满足

(H_4^*). $V(0,t)=0$，$\quad \sum_{i=1}^{m} V_i(X,t) \geqslant \alpha(|X|)$，

$$(X,t) \in E_l \times E_1,$$

这里 $\alpha(r) \in \mathscr{K}$. 则

(i) $\{V_i(X(t),t), \mathscr{N}_t\}, i=1,2,\cdots,m$ 是正上鞅，这里的 $X(t)$，为系统(5.1)的解过程。

(ii) 随机系统(5.1)的平凡解是随机稳定的。

【证明】

(i) 由比较定理 5.3 的证明可知，对任一 $t\geq t_0\geq 0$，$X_0 \in E_l, E_{X_0t_0}V_i(X(t),t)\ (i=1,2,\cdots,m)$ 存在，并且进一步还有

$$E_{X_0t_0}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial V_i}{\partial s}+L^*V_i(X(s),s)\right)ds\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

存在。由 Itô 公式，我们有

$$\begin{aligned}V_i(X(t_2),t_2)=V_i(X(t_1),\ t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial V_i}{\partial t}\\
+L^*V_i(X(t),\ t)\Big)dt+\int_{t_1}^{t_2}(V_i)_X\cdot\sigma dW(t),\\
t_2\geq t_1\geq t_0,i=1,2,\cdots,m.\qquad(5.21)\end{aligned}$$

因由条件(H_2^*)及 Friedman [12] 的定理 4.3.1 知，对任一 $t\geq t_0$，

$$\int_{t}^{t}(V_i(X(s),s))_X\sigma(X(s),s)dW(s),\quad i=1,2,\cdots,m$$

是鞅，所以对于 $i=1,2,\cdots,m$ 有

$$E_{X_0t_0}\left\{\int_{t_1}^{t_2}(V_i(X(t),t))_X\sigma(X(t),t)dW(t)\mid\mathscr{N}_t\right\}=0\quad a.s.$$

由(H_3^*)知

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+L^*V_i(X(t),t)\right)dt\leq 0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

所以

$$E_{X_0t_0}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+L^*V_i(X(t),t)\right)\Big|\mathscr{N}_{t_1}\right\}\leq 0,\ a.s.$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

于是由(5.21)有

$$E_{X_0 t_0}\{V_i(X(t_2),t_2)\mid \mathscr{N}_{t_1}\}\leqslant V_i(X(t_1),t_1)\},\quad a.s.$$
$$(i=1,2,\cdots,m).$$

亦即$\{V_i(X(t),t),\mathscr{N}_t\}$，$(i=1,2,\cdots,m)$是正上鞅。

(ii) 由于$V(X,t)$连续且$V(0,t)\equiv 0$，故对$\forall\varepsilon>0,\varepsilon'>0,t_0\geqslant 0$，总存在一正数$\delta=\delta(t_0,\varepsilon,\varepsilon')<\varepsilon'$，使当$|X_0|\leqslant\delta$时，就有

$$\sum_{i=1}^{m}V_i(X_0,t_0)<\alpha(\varepsilon')\cdot\varepsilon. \tag{5.22}$$

另外，由(i)知$\{V_i(X(t),t),\mathscr{N}_t\}$ $i=1,2,\cdots,m$是正上鞅，从而

$$\{\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t),\mathscr{N}_t\}$$

也是正上鞅，于是当$|X_0|\leqslant\delta$时，由正上鞅不等式及(5.22)，有

$$P_{X_0 t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)\geqslant\alpha(\varepsilon')\}$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(X_0,t_0)}{\alpha(\varepsilon')}<\varepsilon.$$

再由条件(H_4^*)，不难推出

$$P_{X_0 t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}|X(t)|\geqslant\varepsilon'\}<\varepsilon.$$

从而随机系统(5.1)的平凡解是随机稳定的。 ▌

定理 5.21 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T,$$

除满足引理 5.20 中的条件(H_1^*)—(H_4^*)外，还满足条件

(H_5^*). $V_i(X,t)\equiv 0$, $i=1,2,\cdots,h$, 对于$X\in M_{(l-h)}$,

则

$$(\mathrm{CS}_3) \Rightarrow (\mathrm{CRS}_5).$$

【证明】 由引理 5.20 知，(5.1)的平凡解是随机稳定的，当然也是条件随机稳定的。为此，我们只需证明(5.1)的平凡解是条件随机拟渐近稳定的即可。

$\forall \varepsilon>0, \varepsilon'>0, t_0 \geqslant 0$，由于(5.2)的平凡解是条件等度拟渐近稳定的，故必存在一个$\delta_1=\delta_1(t_0)>0$ 和 $T=T(t_0,\varepsilon,\varepsilon')>0$，使当 $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i \leqslant \delta_1$ 且 $u_i=0$，$i=1,2,\cdots,h$ 时，对(5.2)的任一解都有

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(t,u_0,t_0)<a(\varepsilon')\cdot\varepsilon, \quad t\geqslant t_0+T. \tag{5.23}$$

选取 $u_0=(u_{10},\cdots u_{i0},\cdots,u_{m0})$，使得 $u_0=V(X_0,t_0)$. 由于 $V(X,t)$连续且$V(0,t)=0$，故必存在一正数 $\delta_0=\delta_0(t)<\varepsilon$，使当$|X_0|\leqslant\delta_0$ 时就有

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0}=\sum_{i=1}^{m} V_i(X_0,t_0)<\delta_1.$$

从而当$X_0\in\overline{U}(\delta_0)\cap M_{(t-h)}$时，由条件$(\mathrm{H}_5^*)$与比较定理 5.3 及(5.23)就有

$$E_{X_0t_0}\sum_{i=1}^{m} V_i(X(t),t)=\sum_{i=1}^{m} E_{X_0t_0}V_i(X(t),t)\leqslant\sum_{i=1}^{m} r_i(t;u_0,t_0)$$

$$<a(\varepsilon')\cdot\varepsilon, \quad t\geqslant t_0+T. \tag{5.24}$$

再由引理 5.20 知，对任一 $X_0\in\overline{U}(\delta_0)\cap M_{(t-h)}$，

$$\{\sum_{i=1}^{m} V_i(X(t),t), \mathscr{N}_t\}$$

是正上鞅，故由正上鞅不等式及(5.24)有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0+T}\sum_{i=1}^{m} V_i(X(t),t)\geqslant a(\varepsilon')\}$$

$$\leqslant \frac{E_{X_0 t_0}\sum_{i=1}^{m} V_i(X(t_0+T), t_0, T)}{a(\varepsilon')} < \varepsilon.$$

据此及条件(H_4^*)，不难得到

$$P_{X_0 t_0}\{\sup_{t > t_0+T} |X(t)| \geqslant \varepsilon'\} < \varepsilon.$$

从而随机系统(5.1)的平凡解是条件随机拟渐近稳定的。 ▮

与条件随机稳定性的情形一样，对于时齐随机系统(5.1)′相应地可得条件随机渐近稳定性的比较准则。

令$h=0$，则$M_{(l-h)}=E_l$，于是由定理5.21，不难建立利用向量Ляпунов函数来判定随机系统(5.1)的解，关于原点的随机渐近稳定性的比较准则，即下面的推论。

推论 5.22 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

满足定理 5.21 中的条件(H_1^*)—(H_4^*)，则由辅助系统(5.2)平凡解的等度拟渐近稳定性就有随机系统(5.1)平凡解的随机渐近稳定性。

定理 5.23 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

除满足定理 5.21 中的条件(H_1^*)，(H_2^*)，(H_3^*)，(H_5^*)外，以下面的条件(H_4^{**})来替代(H_4^*).

$$(H_4^{**}).\quad \alpha(|X|)\leqslant \sum_{i=1}^{m} V_i(X,t)\leqslant \beta(|X|),$$

$$(X,t)\in E_l\times E_1^+.$$

其中$\alpha(r),\beta(r)\in\mathscr{K}$.

则

$$(CS_4)\Rightarrow(CRS_6).$$

【证明】 在引理中对$\sum_{i=1}^{m} V_i(X_0,t_0)$利用条件$(H_4^{**})$，即

可推出(5.1)的平凡解是随机一致稳定的，当然也是条件随机一致稳定的。

事实上，因$\beta(r)\in\mathscr{K}$，则存在一个不依赖于t_0的正数$\delta=\delta(\varepsilon,\varepsilon')<\varepsilon'$，使当$|X_0|\leqslant\delta$时，就有

$$\sum_{i=1}^{m}V_i(X_0,t_0)\leqslant\beta(|X_0|)<\alpha(\varepsilon')\varepsilon.$$

为此，我们只需证明(5.1)的平凡解是条件随机拟一致渐近稳定的即可。由于(5.2)的平凡解是条件拟一致渐近稳定的，故在定理5.21中的δ_1和T均与t_0无关。另外，在此可这样选取$u_0=(u_1,\cdots,u_m)$，使得$u_{i0}=0$，对于$i=1,2,\cdots,h$；$V(X_0,t_0)\leqslant u_0$，并且

$$\sum_{i=1}^{m}u_{i0}=\beta(|X_0|),$$

对于$X_0\in M_{(1\cdots h)}$。由于条件(H_4^{**})，(H_5^{*})这种选择是可能的。因为$\beta(r)\in\mathscr{K}$，则存在一个与t_0无关的正数$\delta_0<\varepsilon'$，使当$X_0\in\overline{U}(\delta_0)\cap M_{(1\cdots h)}$时，就有

$$\sum_{i=1}^{m}u_i=\beta(|X_0|)<\delta_1.$$

剩下的证明就与定理5.21完全相同。 ∎

当$h=0$时，因为$M_{(1h\cdots)}=E_l$，则由定理5.21与定理5.23，不难建立利用向量Ляпунов数来判定随机系统(5.1)平凡解的随机完全稳定性与随机一致完全稳定性的比较准则，亦即下面的定理5.24（证明从略）。

定理5.24 在定理5.23的(H_1^{*})，(H_2^{*})，(H_3^{*})以及(H_4^{**})的条件下，则由常微辅助系统(5.2)平凡解的拟完全稳定性（拟一致完全稳定性）就有随机系统(5.1)平凡解的随机完全稳定性（随机一致完全稳定性）。

[注]5.3 如果$h=0$，$m=1$，则定理5.21，定理5.23和定理5.24就分别化为纯量Ляпунов函数相应的比较准则(详见胡宣达等[2])。

[注]5.4 随机系统(5.1)的平凡解是称为随机完全稳定的，如果它是随机稳定的，并且对任意$\lambda>0$，$\varepsilon>0$，$\varepsilon'>0$，$t_0\geqslant 0$，存在一正数$T=T(t_0,\varepsilon,\varepsilon',\lambda)$使当$|X_0|\leqslant\lambda$时，就有

$$P_{\lambda_0 t_0}\{|X(t)|<\varepsilon',\text{对于所有的}\ t\geqslant t_0+T\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

称为随机一致完全稳定的，如果它是随机一致稳定的，并且上述定义中的T与t_0无关。

对于常微树的系统(5.2)的平凡解是称为拟完全稳定的，如果对任意给的$\lambda>0$，$\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，存在一正数$T=T(t_0,\varepsilon,\lambda)$使当

$\sum_{i=1}^{m} u_{i0}\leqslant\lambda$时，就有

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(t,\ u_0,\ t_0)<\varepsilon,\quad t\geqslant t_0+T.$$

称为拟一致完全稳定的，如果上述定义中的T与t_0无关。

称为完全稳定的，如果它是等度稳定的，并且是拟完全稳定的。

称为一致完全稳定的，如果它是一致稳定的，的并且是拟一致完全稳定的。

三、例

在这里我们给出几个例子，借以说明结果的有效性。

例5.1 考察下列Itô随机微分方程的条件稳定性。

$$dX(t)=A(t)X(t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t),$$
$$X(t_0)=X_0(\in E_3),\ a.s. \tag{5.25}$$

这里

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},\qquad \sigma(X,t)=\begin{pmatrix}\sigma_1(X,t)\\\sigma_2(X,t)\\\sigma_3(X,t)\end{pmatrix}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} 1+e^{-2t} & 1-e^{-2t} & e^{2t}-1 \\ -e^{-t}+1 & 1+e^{-t} & e^{t}-1 \\ e^{-2t}-e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}+e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$W(t)$ 为标准的纯量 Wiener 过程，并且 $\sigma(X,t)$ 满足假设(A_1)，(A_2)。进而假设 $\sigma(0,t)\equiv 0$，$t\in E_1^+$，並且

$$\left.\begin{aligned} &[\sigma_1(X,t)+\sigma_2(X,t)-\sigma_3(X,t)]^2 \\ &\qquad \leqslant \lambda(t)(x_1+x_2-x_3)^2 \\ &[\sigma_1(X,t)-\sigma_2(X,t)+\sigma_3(X,t)]^2 \\ &\qquad \leqslant \lambda(t)(x_1-x_2+x_3)^2 \\ &[-\sigma_1(X,t)+\sigma_2(X,t)+\sigma_3(X,t)]^2 \\ &\qquad \leqslant \lambda(t)(-x_1+x_2+x_3)^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

这里 $\lambda(t)\in C[E_1^+,E_1^+]\cap L_1[0,\infty]$。

取 $m=3$，並置向量 Ляпунов 函数：

$$V(X,t)=((x_1+x_2-x_3)^2,(x_1-x_2+x_3)^2,\\ (-x_1+x_2+x_3)^2)^T$$

因为

$$\sum_{i=1}^{3}V_i(X,t)=[x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2 \\ +(x_1-x_2)^2],$$

所以

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leqslant\sum_{i=1}^{3}V_i(X,t)\leqslant 5(x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

进而利用(5.26)，即可导得向量不等式

$$\partial V/\partial t+L^*V(X,t)\leqslant g(V(X,t),t).$$

这里

$$g(u,t)=\begin{pmatrix}(4+\lambda(t))u_1 \\ (4e^{-2t}+\lambda(t))u_2 \\ (4e^{-t}+\lambda(t))u_3\end{pmatrix}$$

易见 $g(u,t)$ 关于 u 是凹的，并且对每一 $t\in E_1^+$ 不仅是拟单

调非降的，而且是单调非降的，同时还有

$$g(V(X,t),t)-\partial V/\partial t=g(V(X,t),t)\geqslant 0,$$
$$(X,t)\in E_3\times E_1^+,$$

选取 $h=1$，则常微辅助系统：

$$u'=g(u,t),\ u(t_0)=u_0\geqslant 0 \tag{5.27}$$

满足 $u_{10}=0$ 的解为

$$r(t;u_0,t_0)=\begin{cases} 0 \\ u_{20}\exp\{\int_{t_0}^{t}[4e^{-2s}+\lambda(s)]ds\} \\ u_{30}\exp\{\int_{t_0}^{t}[4e^{-s}+\lambda(s)]ds\} \end{cases}$$

易见辅助系统(5.27)的平凡解是条件一致稳定的，并且定理5.19的所有条件均满足，因此在二维流形

$$M_{(3-h)}=M_{(2)}\triangleq\{(x_1,x_2,x_3)\in E_3;x_1+x_2=x_3\}$$

的条件下，由定理5.19，我们得到随机系统 (5.25) 的平凡解是条件随机一致稳定的。

下面我们给出一个利用向量 Ляпунов 函数来判定Itô随机系统平凡解的通常随机完全稳定性的例子。正如在第4章§4.4中的例子所见到的，一般说来，向量 Ляпунов 函数优越于纯量 Ляпунов 函数，因为对向量 Ляпунов 函数说来，其对每一分量 Ляпунов 函数的要求是较弱的。（详见前面比较准则中的条件）。

例5.2 考虑下列Itô随机微分过程：

$$dX(t)=b(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t),$$
$$X(t_0)=X_0(\in E_2),\ a.s.\ \ t_0>0. \tag{5.28}$$

其中

$$b(X,t)=\begin{pmatrix} -x_1 e^{\frac{1}{1+t}} \\ -x_2 e^{\frac{1}{1+t}} \end{pmatrix}$$

$\sigma(X,t)$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,x_1 \sin t \exp[-t(x_1^2+x_2^2)] & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,x_2 \sin t \exp[-t(x_1^2+x_2^2)] \end{pmatrix}$$

$W(t)$为二维标准 Wienir 过程.

不难验证，$b(X,t)$，$\sigma(X,t)$满足条件 (A_1) 和(A_2)，取 $m=2$，并置向量 Ляпунов 函数：

$$V(X,t)=V(X)=(x_1^2,x_2^2)^T,$$

因为 $\sum_{i=1}^{2} V_i(X,t)=x_1^2+x_2^2$，所以对于 $V(X,t)$，显然满足条件(H_1^*)，(H_4^{**})。进而可得

$$\frac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\leqslant\begin{pmatrix} 2(\sin^2 t-e^{\frac{1}{1+t}})V_1(X,t) \\ 2(\sin^2 t-e^{\frac{1}{1+t}})V_2(X,t) \end{pmatrix}$$

$$=g(V(X,t),t),$$

这里

$$g(u,t)=\begin{pmatrix} 2(\sin^2 t-e^{\frac{1}{1+t}})u_1 \\ 2(\sin^2 t-e^{\frac{1}{1+t}})u_2 \end{pmatrix}$$

易见 $g(u,t)$关于 u 是凹的，且对每一 $t\in E_1^+$ 是拟单调非降的，并满足条件(H_3^*)。

现验证 $V(X,t)$满足条件(H_2^*)。对任一 $T>t_0$，

$$\int_{t_0}^{T} E\,\|V_X(X(t),t)\sigma(X(t),t)\|^2 dt$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{T}E[8(x_1(t))^4\sin^2t+8(x_2(t))^4\sin^2t]dt$$

$$\leqslant 8\int_{t_0}^{T}\sin^2tE|X(t)|^4dt.$$

由于

$$E\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|X(t)|^{2m}\}\leqslant C^*(1+E|X_0|^{2m})$$

$$=C^*(1+|X_0|^{2m})<\infty.$$

这里的 C^* 是一个仅依赖于 T，m 及线性增长常数 L 的正常数（见定理 2.2），所以

$$\int_{t_0}^{T}E\|V_X(X(t),t)\sigma(X(t),t)\|^2dt$$

$$\leqslant E\left[\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|X(t)|^4\right]\int_{t_0}^{T}8\sin^2tdt<\infty.$$

故 $V(X,t)$ 也满足条件(H_2^*).

现考察常微辅助系统

$$u'=g(u,t),\quad u(t_0)=u_0>0.$$

其解为

$$r(t;u_0,t_0)=\begin{cases}u_{10}\exp[2\int_{t_0}^{t}(\sin^2s-e^{\frac{1}{1+s}})ds]\\ u_{20}\exp[2\int_{t_0}^{t}(\sin^2s-e^{\frac{1}{1+s}})ds]\end{cases}.$$

易见其平凡解 $u=0$ 是完全稳定的，故由定理 5.24 知随机系统(5.28)的平凡解是随机完全稳定的。

§5.3 Itô方程的条件随机有界性

本节的目的是讨论 Itô 方程的条件随机有界性。我们首

先将给出 Itô 方程解的条件随机有界性、条件随机一致有界性、条件随机终归有界性及条件随机同等终归有界性的定义。这些定义是常微分方程中相应定义的自然推广。然后，在这些定义及基本比较定理的基础上，建立条件随机有界性、条件随机一致有界性、条件随机终归有界性及条件随机同等终归有界性等比较准则。并且还给出随机同等终归有界的一个例子来说明这些比较准则的有效性。

一、条件随机界性定义

定义 5.9 随机微分系统(5.1)的解过程 $X(t)$ 是称为：

(CRB_1). **条件随机有界的**，如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\alpha>0$，$t_0\in E_1^+$，$\exists$ 正数 $\beta=\beta(\varepsilon,\alpha,t_0)$，使当 $X_0\in\bar{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$ 时，有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\leqslant\beta，对于所有的\ t\geqslant t_0\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

(CRB_2). **条件随机一致有界的**，如果 (CRB_1) 中的 β 与 t_0 无关。

(CRB_3). **条件随机拟终归有界的**，如果对 $\forall\varepsilon>0,\alpha>0$，$t_0\in E_1^+$，$\exists$ 正数 $N=N(\varepsilon)$，$T=T(\varepsilon,\alpha,t_0)$，使当 $X_0\in\bar{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$ 时，有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\leqslant N，对所有\ t\geqslant t_0+T\}>1-\varepsilon.$$

(CRB_4). **条件随机拟一致终归有界的**，如果 (CRB_3) 中的 T 与 t_0 无关。

(CRB_5). **条件随机终归有界的**，如果 (CRB_1) 与 (CRB_3) 同时成立。

(CRB_6). **条件随机一致终归有界的**，如果，(CRB_2) 与 (CRB_4) 同时成立。

(CRB_7). **条件随机拟同等终归有界的**，如果对 $\forall \varepsilon>0$, $\alpha>0$, $t_0\in E_1^+$，∃正数 N 及 $T=T(\varepsilon,\alpha,t_0)$ 使当 $X_0\in\overline{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$ 时，有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\leqslant N, \text{对所有 } t\geqslant t_0+T\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

(CRB_8). **条件随机拟一致同等终归有界的**，如果 (CRB_7) 中的 T 不依赖于 t_0.

(CRB_9). **条件随机同等终归有界的**，如果 (CRB_1) 与 (CRB_7) 同时成立。

(CRB_{10}). **条件随机一致同等终归有界的**，如果 (CRB_2) 与 (CRB_8) 同时成立。

上述定义在 $h=0$ 时（此时 $M_{(l-h)}=E_l$），就化为通常的随机有界性的定义（见胡宣达等[3]）.

对于常微辅助系统(5.2)，我们需要相应的定义 (CB_1)—(CB_6).

定义 5.10 常微分系统(5.2)的解是称为：

(CB_1). **条件等度有界的**，如果对 $\forall\alpha>0, t_0\in E_1^+$，∃正数 $\beta=\beta(\alpha,t_0)$ 使当

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0}\leqslant\alpha,\quad u_{10}=\cdots=u_{k_0}=0$$

时，对(5.2)的任一解 $u(t,u_0,t_0)$，都有

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(t;u_0,t_0)\leqslant\beta,\quad t\geqslant t_0.$$

(CB_2)—(CB_6) 可类似地定义。

二、条件随机有界性比较准则

定理 5.25 假设存在一个函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

满足下列条件：

(H_1^*). $V\in C[E_l\times E_1^+,E_m^+]$, V_t,V_X,V_{XX} 在 $E_l\times E_1^+$ 上存在且连续；

$(\overline{\mathrm{H}}_2)$. $g(V(X,t),t)-\partial V(X,t)/\partial t\geqslant 0$

$$(X,t)\in E_l\times E_1^+;$$

$(\overline{\mathrm{H}}_3)$ $\partial V(X,t)/\partial t+L^*V(X,t)\leqslant g(V(X,t),t)$,

$$(X,t)\in E_l\times E_1^+;$$

$(\overline{\mathrm{H}}_4)$. $V_i(X,t)\equiv 0$, $i=1,2,\cdots,h$, 对 $X\in M_{(l-h)}$;

$(\overline{\mathrm{H}}_5)$. $\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(X,t)\geqslant b(|X|)$, $(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

这里 $b\in C[E_1^+,E_1^+]$，且当 $r\to\infty$ 时，$b(r)\to\infty$.

则

$$(\mathrm{CB}_1)\Rightarrow(\mathrm{CRB}_1).$$

【证明】 从基本比较定理 5.1 的证明，由条件 (H_1^*)，$(\overline{\mathrm{H}}_2)$ 及 $(\overline{\mathrm{H}}_3)$ 不难得到对 $\forall r>0$，由 $V(X_0,t_0)\leqslant u_0$，就有

$$E_{X_0t_0}V(\widetilde{X}(t),t)\leqslant r(t;u_0,t_0),\quad t\geqslant t_0. \tag{5.29}$$

这里 $\widetilde{X}(t)=X(t\wedge\tau_{t_0}(r))$, $X_0\in U(r)$.

现对 $\forall\varepsilon>0$, $\alpha>0$，令

$$\alpha_1=\sup_{x\in U(\alpha)\cap M(l-h)}\sum_{i=1}^{m}V_i(X,t_0),$$

则 α_1 依赖于 α，t_0；又令 $u_0=V(X_0,t_0)$，因辅助系统 (5.2) 的解是条件等度有界的，故对这个 α_1 及 $t_0\in E_1^+$，存在一正数 $\beta_1=\beta_1(\alpha_1,t_0)$，使当

$$\sum_{i=1}^{m}u_{i0}\leqslant\alpha_1,\quad u_{10}=\cdots=u_{h0}=0\text{时},$$

对 (5.2) 的一切解都有

$$\sum_{i=1}^{m}u_i(t;u_0,t_0)\leqslant\beta_1,\quad t\geqslant t_0.$$

因 α_1 依赖于 α,t_0，故 β_1 实际上依赖于 α,t_0.

另方面，由$(\overline{H}_5)$，当$r\to\infty$时，$b(r)\to\infty$，故存在一正数$\beta=\beta(\beta_1,\varepsilon)>\alpha$，使当$r\geqslant\beta$时，$b(r)\geqslant\beta_1/\varepsilon$，因$\beta_1$依赖于$\alpha$，$t_0$，故$\beta$实际上依赖于$\alpha,\varepsilon,t_0$. 利用$(\overline{H}_5)$及Markov过程$X(t)$的连续性有

$$E_{X_0t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(\widetilde{X}(t),t)\geqslant\int_{\{\tau_{t_0}(\beta)<t\}}\sum_{i=1}^{m}V_i(\widetilde{X}(t),t)dP_{X_0t_0}$$

$$\geqslant\int_{\{\tau_{t_0}(\beta)<t\}}b(|X(\tau_{t_0}(\beta))|)dP_{X_0t_0}$$

$$=b(\beta)P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\beta)<t\}$$

$$\geqslant\beta_1/\varepsilon P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\beta)<t\}.$$

于是由(5.29)推出，当$X_0\in U(\alpha)\cap M_{(l-h)}$时，有

$$P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\beta)<t\}\leqslant\varepsilon.$$

让$t\to\infty$，对上式取极限就得到

$$P_{X_0t_0}\{\tau_{t_0}(\beta)<\infty\}\leqslant\varepsilon.$$

因此，对$\forall\varepsilon>0,\alpha>0,t_0\in E_1^+$，$\exists$ $\beta=\beta(\varepsilon,\alpha,t_0)>\alpha$，使当$X_0\in U(\alpha)\cap M_{(l-h)}$时，有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\leqslant\beta,\text{对 }\forall t\geqslant t_0\}\geqslant1-\varepsilon.\quad\blacksquare$$

推论 5.26 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

除满足定理5.25的条件(H_1^*)，$(\overline{H}_4)$，$(\overline{H}_5)$外，还满足下列条件：

$(\overline{H}_2')$. $\partial V(X,t)/\partial t\leqslant0$.

$(\overline{H}_3')$. $\partial V(X,t)/\partial t+L^*V(X,t)\leqslant0$;

则随机系统(5.1)的解是条件随机有界的。

【证明】 注意常微辅助系统(5.2)可取如下形式：

$$u'=0,\quad v(t_0)=u_0\geqslant0.$$

因此(CB_1)成立，故由定理5.25本推论成立。

定理 5.27 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T.$$

除满足定理 5.25 中的条件(H_2^*)，$(\bar{H}_2)$，(H_3)，$(\bar{H}_4)$外，还满足下列条件：

$$(\bar{H}_5').\quad b(|X|)\leqslant\sum_{i=1}^{m}V_i(X,t)\leqslant a(|X|),$$
$$(X,t)\in E_l\times E_1^+.$$

这里 $a(r)\in C[E_1^+,E_1^+]$，$b(r)\in C[E_1^+,E_1^+]$，且当$r\to\infty$时，$b(r)\to\infty$.

则有

$$(CB_2)\Rightarrow(CRB_2)$$

【证明】 只要在定理 5.25 的证明中，令

$$\alpha_1=\sup_{X\in U(a)\cap M(t-h)}a(|X|)$$

并由辅助系统(5.2)解的条件一致有界性，就知道定理 5.25 证明中的 β 与 t_0 无关，因而随机系统(5.1)解的条件随机有界性成为条件随机一致有界性。

三、条件随机终归有界性比较准则

引理 5.28 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

除满足基本比较定理 5.3 中的条件(H_1^*)，(H_2^*)，(H_3^*)外，还满足定理 5.25 中的条件(H_4)，(H_6)，则随机系统(5.1)的解是条件随机有界的。

【证明】 由§5.2引理5.20知$\{V_i(X(t),t),\mathscr{N}_t\}$ $i=1,2,\cdots,m$ 是正上鞅，因而$\{\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t),\mathscr{N}_t\}$也是正上鞅，故由正上鞅不等式有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>\mu\}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m}V_i(X_0,t_0)}{\mu},\quad\forall\mu>0.$$

因$V(X,t)$连续，故对$\forall\alpha>0$，$\exists$正数$\alpha_1=\alpha_1(\alpha,t_0)$，使当$X_0\in\overline{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$时，

$$\sum_{i=1}^{m}V_i(X,t_0)\leqslant\alpha_1.$$

从而当$X_0\in\overline{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$时，有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>\mu\}\leqslant\alpha_1/\mu,\ \forall\mu>0.$$

取$\mu=\alpha_1/\varepsilon$，则对$X_0\in\overline{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$，有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>\alpha_1/\varepsilon\}\leqslant\varepsilon.$$

因$r\to\infty$时，$b(r)\to\infty$，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$\beta=\beta(\alpha_1,\varepsilon)$，使当$\gamma>\beta$时，$b(r)>\alpha_1/\varepsilon$。由于$\alpha_1$依赖于$\alpha,t_0$，故这里的$\beta$实际上依赖于$\alpha,\varepsilon,t_0$，这样，有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}|X(t)|>\beta\}\leqslant P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}b(|X(t)|)>\alpha_1/\varepsilon\}$$

$$\leqslant P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>\alpha_1/\varepsilon\}\leqslant\varepsilon.$$

所以对$\forall\varepsilon>0,\alpha>0,t_0\geqslant0$，$\exists$一个$\beta=\beta(\varepsilon,\alpha,t_0)>\alpha$，使当$X_0\in\overline{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$时，都有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\leqslant\beta,\ 对一切\ t\geqslant t_0\}\geqslant1-\varepsilon.\ \blacksquare$$

定理 5.29 在引理 5.28 的条件下，则有

$$(CB_3)\Rightarrow(CRB_5).$$

【证明】 由引理5.28知，随机系统(5.1)的解是条件随机有界的，因此，我们只需证明系统(5.1)的解是条件随机拟终归有界的。

由正上鞅不等式及基本比较定理5.3，对$V(X_0,{}_0t)\leqslant v_0$有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geqslant t_0+\tau}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>\mu\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu} E_{X_0t_0} \sum_{i=1}^{m} V_i(X(t_0+T), t_0+T)$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{m} r_i(t_0+T; u_0, t_0), \quad \forall \mu > 0.$$

对$\forall \alpha > 0$，由$V(X,t)$的连续性，存在正数$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha, t_0)$，使当$X \in \overline{U}(\alpha) \cap M_{(l-h)}$时，有

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(X, t_0) \leqslant \alpha_1.$$

对这个α_1，由(5.2)解的条件拟终归有界性，存在$N_1 > 0$，$T = T(\alpha_1, t_0)$，使当$\sum_{i=1}^{m} u_{i0} \leqslant \alpha_1$，$u_{10} = \cdots = u_{h0} = 0$时，有

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(t; u_0, t_0) \leqslant N_1, \quad \forall t \geqslant t_0 + T.$$

令$u_0 = V(X_0, t_0)$，故当$X_0 \in \overline{U}(\alpha) \cap M_{(l-h)}$时，

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t \geqslant t_0+T} \sum_{i=1}^{m} V_i(X(t), t) > \mu\} \leqslant \frac{N_1}{\mu}, \quad \forall \mu > 0.$$

因$r \to \infty$时，$b(r) \to \infty$，故对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon) > 0$，使当$r > N$时，有$b(r) > N_1/\varepsilon$. 取$\mu = N_1/\varepsilon$，则

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t \geqslant t_0+T} |X(t)| > N\} \leqslant P_{X_0t_0}\{\sup_{t \geqslant t_0+T} b(|X(t)|) > N_1/\varepsilon\}$$

$$\leqslant P_{X_0t_0}\{\sup_{t \geqslant t_0+T} \sum_{i=1}^{m} V_i(X(t), t) > N_1/\varepsilon\} \leqslant \varepsilon.$$

因此，对$\forall \varepsilon > 0, \alpha > 0$，$t_0 \in E_1$，$\exists N = N(\varepsilon) > 0$，$T = T(\alpha, t_0) > 0$，使当$X_0 \in \overline{U}(\alpha) \cap M_{(l-h)}$时，有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)| \leqslant N, \text{对所有 } t \geqslant t_0 + T\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

从而证得系统(5.1)的解是条件随机拟终归有界的。 ∎

定理 5.30 假设存在一函数

$$V(X, t) = (V_1(X,t), \cdots, V_m(X, t))^T$$

除满足引理 5.28 的条件外，还满足下面的条件：

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(X,t) \leqslant a(|X|),\quad (X,t) \in E_l \times E_l$$

其中 $a(r) \in C[E_l^+, E_l^+]$，则有

$$(\mathrm{CB}_t) \Rightarrow (\mathrm{CRB}_8).$$

证明显然，故从略。

四、条件随机同等终归有界性比较准则

定理 5.31 在引理 5.28 的条件下，如果常微辅助系统(5.2)的最大解 $r(t;u_0,t_0)$ 具有如下的性质：

对 $\forall \varepsilon>0, \alpha>0, \exists T=T(\varepsilon,\alpha,t_0)>0$，使当

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0} \leqslant \alpha,\quad u_{10}=\cdots=u_{h0}=0, t \geqslant t_0+T$$

时有 $\sum_{i=1}^{m} r_i(t;x_0,t_0)<\varepsilon$. 则随机系统(5.1)的解是条件随机同等终归有界的。

【证明】 只需证 (5.1) 的解是条件随机拟同等终归有界的即可。对 $\forall \alpha>0$，由 $V(X,t)$ 的连续性，$\exists \alpha_1=\alpha_1(\alpha,t_0)>0$，使得对一切 $X \in \overline{U}(\alpha) \cap M_{(l-h)}$，有

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(X,t_0) \leqslant \alpha_1,$$

对这个 $\alpha_1>0$ 及 $\forall \varepsilon>0, \exists T=T(\varepsilon,\alpha_1,t_0)>0$，使当

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0} \leqslant \alpha_1,\quad u_{10}=\cdots=u_{l0}=0$$

时，有

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(t;h_0,t_0)<\varepsilon.$$

令 $u_0=V(X_0,t_0)$，则当 $X_0 \in \overline{U}(\alpha) \cap M_{(l-h)}$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{l} r_i(t;u_0,t_0)<\varepsilon,\quad \forall t \geqslant t_0+T.$$

这里的 T 实际上依赖于 ε,α,t_0，不妨表 $T=T(\varepsilon,\alpha,t_0)$。由正上

耕不等式及基本比较定理 5.3，对 $X_0\in \bar{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$ 有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geq t_0+T}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>\mu\}$$

$$\leq\frac{1}{\mu}E_{X_0t_0}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t_0+T),t_0+T)$$

$$\leq\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}r_i(t_0+T;u_0,t_0)<\varepsilon/\mu,\quad \forall\mu>0,$$

根据 $b(r)$ 的性质，$\exists N>0$，使当 $r>N$ 时，有 $b(r)>1$，从而有

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geq t_0+T}|X(t)|>N\}\leq P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geq t_0+T}b(|X(t)|)>1\}$$

$$\leq P_{X_0t_0}\{\sup_{t\geq t_0+T}\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t),t)>1\}\leq\varepsilon.$$

因此对 $\forall\varepsilon>0,\alpha>0,t_0\in E_1^+$，$\exists N>0,T=T(\varepsilon,\alpha,t_0)$ 使当 $X_0\in \bar{U}(\alpha)\cap M_{(l-h)}$ 时，有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\leq N,\text{对一切}t\geq t_0+T\}\geq 1-\varepsilon.\quad ∎$$

推论 5.32 如果定理 5.31 的条件对 $h=0$ 成立，则随机系统(5.1)的解是随机同等终归有界的。

例 5.3 考察下面二维 Itô 随机微分系统：

$$\begin{aligned}&dX(t)=b(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t)\\&X(t_0)=X_0,\quad a.s.\end{aligned}\qquad(5.30)$$

其中

$$b(X,t)=\begin{pmatrix}-(x_1+x_2)-e^{-t}\\-(x_2-x_1)-e^{-t}\end{pmatrix},$$

$$\sigma(X,t)=\begin{pmatrix}x_1+e^{-t}&0\\0&x_2+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$W(t)$ 为标准二维 Wiener 过程。

取 $V(X,t)=x_1^2+x_2^2+e^{-2t}$，则

$$x_1^2+x_2^2 \leqslant V(X,t) \leqslant x_1^2+x_2^2+1$$

$$\begin{aligned}\partial V(X,t)/\partial t + L^* V(X,t) = & -2e^{-2t}+2x_1[-(x_1+x_2) \\ & -e^{-t}]+2x_2[-(x_2-x_1)-e^{-t}]+(x_1+e^{-t})^2 \\ & +(x_2+e^{-t}) = -(x_1^2+x_2^2) \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{T} E_{x_0t_0} |\sigma(X(t),t) V_x(X(t),t)|^2 dt \\ &\leqslant \int_{t_0}^{T} E_{x_0t_0}\{[2x_1(t)(x_1(t)+e^{-t})]^2+[2x_2(t)(x_2(t)e^{-t})]^2\}dt \\ &= \int_{t_0}^{T} E_{x_0t_0}[8(x_1^2(t)+x_2^2(t))^2+8(x_1^2(t)+x_2^2(t))e^{-2t}]dt \\ &\leqslant 8C_1(1+|X_0|^4)(T-t_0)+4C_2(1+|X_0|^2)(e^{-2t_0} \\ &\quad -e^{-2T})<\infty, \quad \forall T>t_0.\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 是与 T 有关的常数。

考虑辅助系统：

$$u' = -u+e^{-2t}, \quad u(t_0)=u_0 \geqslant 0.$$

其解为 $r(t;u_0,t_0)=e^{-2t}+u_0e^{-(t-t_0)}+e^{-(t+t_0)}, t \geqslant t_0$. 可见，对 $\forall \varepsilon>0, \alpha>0, t_0 \in E_1^+$，必 $\exists$ $T=T(\varepsilon,\alpha,t_0)>0$，使当 $u_0 \leqslant \alpha$，$t \geqslant t_0+T$ 时，有 $r(t;u_0,t_0)<\varepsilon$. 因此，随机系统(5.30)的解是随机同等终归有界的

定理 5.33 假设存在一函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T,$$

除满足引理 5.28 的条件外，还满足下面的条件：

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(X,t) \leqslant a(|X|), \quad (X,t) \in E_l \times E_1^+.$$

其中 $a(r) \in C[E_1^+, E_1^+]$；并且常微辅助系统(5.2)的最大解 $r(t;u_0,t_0)$ 具有如下的性质：

对 $\forall \varepsilon>0, \alpha>0$，$\exists$ 一个与 t_0 无关的 $T=T(\varepsilon,\alpha)>0$，使当

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i0} \leqslant \alpha, \quad u_{10}=\cdots=u_{m0}=0, \quad t \geqslant t_0+T$$

时，有

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(t;u_0,t_0)\leqslant\varepsilon.$$

则随机系统(5.1)的解是条件随机一致同等终归有界的。

证明显然，故从略。

§5.4 Itô方程的指数稳定性与几乎必然稳定性

一、Itô 方程的指数稳定性

微分方程解的指数稳定性是一种性态较好的渐近稳定性。这一段的目的是利用基本比较定理较系统地研究一般非时齐 Itô 方程解的指数稳定性。建立随机指数稳定性、指数 p 稳定性以及几乎必然指数稳定性的比较准则，这样就将 Itô 方程解的指数稳定性与相应的常微辅助系统解的指数稳定性建立了直接的联系，而且指数 p 稳定性与几乎必然指数稳定性比较准则的特例即为 Nevel'son 和 Хасбминский 的相应结果（定理 2.36 及定理 2.41）。

下面为了随机系统 (5.1) 有解 $X(t)\equiv0$，我们仍引进假设：

$$b(0,t)\equiv0,\ \ \sigma(0,t)\equiv0,\ \ t\geqslant0.$$

对于辅助系统，我们取系统(5.2)中的 $m=1$ 作为本段的相应辅助系统，即

$$u'=g(u,t)\quad u(t_0)=u_0\geqslant0, \tag{5.2}$$

假设(a_1)．$g\in C[E_1^+\times E_1^+,E_1]$且 $g(u,t)$对每一 $t\in E_1^+$，关于 u 为凹函数。

(a_2). $r(t;u_0,t_0)$ 为(5.2)′ 存在于 $t\geqslant t_0$ 的最大解。

(a_3). $g(0,t)\equiv 0, t\geqslant 0$, 这一假设也意味着(5.2)′ 的解是非负的。

定义 5.11 随机系统(5.1)的平凡解是称为:

(RES). **随机指数稳定的**, 如果 $\forall\varepsilon>0, X_0\in E_l, t_0\geqslant 0$, ∃数 $\beta>0, K(\varepsilon)>0$, 使得

$$P_{Xx_0t_0}\{\sup_{s\geqslant t}|X(s)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant K(\varepsilon)|X_0|\exp[-\beta(t-t_0)],$$

对所有的 $t\geqslant t_0$。

(EPS). **指数 p 稳定的**, 如果 对 $\forall X_0\in E_l, t_0\geqslant 0$, ∃数 $K>0, \beta>0$, 使得

$$E_{X_0t_0}|X(t)|^p\leqslant K|X_0|^p\exp[-\beta(t-t_0)], (p>0).$$

如果 $p=1,2$, 这就是通常所考虑的均值指数稳定性与均方指数稳定性。

(A.S.E.S). **几乎必然指数稳定的**, 如果对 $\forall X_0\in E_l$, $t_0\geqslant 0$, ∃一常数 $\alpha>0$ 及一依赖于 X_0, t_0 的正随机变量 $K(X_0, t_0)$, 使得

$$|X(t)|\leqslant K(X_0,t_0)\exp[-\alpha t], a.s. (P_{X_0t_0}), t\geqslant t_0.$$

对于常微辅助系统(5.2)′, 我们有

定义 5.12 常微辅助系统(5.2)′ 的平凡解 $u\equiv 0$ 是称为:

(ES). **等度指数稳定的**, 如果对 $\forall u_0>0, t_0\geqslant 0$, ∃数 $\beta>0, K>0$, 使得对(5.2)′ 的任一解 $u(t;u_0,t_0)$都有

$$u(t;u_0,t_0)\leqslant Ku_0\exp[-\beta(t-t_0)], \text{对于所有的} t\geqslant t_0.$$

定理 5.34 (随机指数稳定性比较准则) 假设存在一函数 $V(X,t)$ 满足下列条件:

(H_1^*)′ $V\in C[E_l\times E_1^+, E_1^+], V_t, V_X, V_{XX}$ 存在且连续, 对

对于$(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

(H_2^*). 对任一$T>t_0$,关于(5.1)的解过程$X(t)$有

$$V_X(X(t),t)\sigma(X(t),t)\in M^2_W[t_0,T].$$

(H_3^*). $LV(X,t)\leqslant g(V(X,t),t)\leqslant 0,\ (X,t)\in E_l\times E_1^+$.

(H_4). $\alpha(|X|)\leqslant (X,t)\leqslant C|X|$ 对于$(X,t)\in E_l\times E_1^+$.
这里$\alpha\in\mathscr{K}$, C为一正常数。

则

$$(ES)\Rightarrow(RES).$$

【证明】 对$\forall\varepsilon>0$, $X_0\in E_l$, $t_0\geqslant 0$, 由于常微辅助系统(5.2)′的平凡解是等度指数稳定的，故由定义5.12，一定存在数$\beta>0$, $K'>0$. 使得对于(5.2)′的任一解$u(t;u_0,t_0)$都有

$$u(t;u_0,t_0)\leqslant K'u_0\exp[-\beta(t-t_0)],\ \text{对于所有的}\ t\geqslant t_0.$$

选取$u_0=V(X_0,t_0)$,故由纯量Ляпунов函数的基本比较定理5.3就有

$$E_{X_0t_0}V(X(t),t)\leqslant r(t;u_0,t_0)\leqslant K'u_0\exp[-\beta(t-t_0)]$$

$$\text{对于所有的}\ t\geqslant t_0. \qquad (*)$$

由§5.2的引理5.20知，对任一$X_0\in E_l$, $t_0\geqslant 0$, $V(X(t),t)$是正上鞅，故由正上鞅不等式、条件(H_4)及$(*)$有

$$\begin{aligned}P_{X_0t_0}\{\sup V(X(s),s)\geqslant\alpha(\varepsilon)\}&\leqslant\frac{E_{X_0t_0}V(X(t),t)}{\alpha(\varepsilon)}\\&\leqslant\frac{K'u_0\exp[-\beta(t-t_0)]}{\alpha(\varepsilon)}\\&=\frac{K'V(X_0,t_0)\exp[-\beta(t-t_0)]}{\alpha(\varepsilon)}\\&\leqslant\frac{K'C|X_0|}{\alpha(\varepsilon)}\exp[-\beta(t-t_0)]\\&=K(\varepsilon)|X_0|\exp[-\beta(t-t_0)],\ t\geqslant t_0.\end{aligned}$$

据此及条件(H_4)不难推得

$$P_{X_0t_0}\{\sup_{s\geqslant t}|X(s)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant K(\varepsilon)|X_0|\exp[-\beta(t-t_0)],t\geqslant t_0.$$

推论 5.35 假设存在一函数$V(X,t)$，除满足定理5.34的条件$(H_1^*)'$ 及(H_4)外，定理的条件 (H_3^*) 以下面的 条件 $(H_3^*)'$ 来替代：

$(H_3^*)'$. $LV(X,t)\leqslant -kV(X,t)$， $(X,t)\in E_l\times E_1^+$.
这里k为一正常数。

则随机系统(5.1)的平凡解是随机指数稳定的。

【证明】 首先由条件$(H_3^*)'$ 及(H_4)保证了定理中的条件(H_2^*)成立。另外，由条件$(H_3^*)'$，可将常微辅助系统$(5.2)'$ 化简为：

$$u'=-ku,\ u(t_0)=u_0\geqslant 0,\ t_0\geqslant 0.$$

显然，它是指数稳定的，故由定理5.34即得此推论。 ∎

定理 4.36（指数p稳定性的比较准则） 假设存在一函数$V(X,t)$，除满足定理5.34中的条件$(H_1^*)'$，(H_2^*)和(H_3^*)外，还满足条件：

(H_5). $k_1|X|^p\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^p$, $(X,t)\in E_l\times E_1^+$.
这里k_1,k_2为两个正常数。

则有

$$(ES)\Rightarrow(EPS).$$

【证明】 对$\forall X_0\in E_l$，$t_0\geqslant 0$，由于常微辅助系统$(5.2)'$ 的平凡解是等度指数稳定的，故由定义5.12，一定存在数$K'>0,\beta>0$，使得对于$(5.2)'$ 的任一解$u(t;u_0,t_0)$都有

$$u(t;u_0,t_0)\leqslant K'u_0\exp[-\beta(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0.$$

选取$u_0=V(X_0,t_0)$，故由纯量Ляпунов函数基本比较定理5.3将有

$$E_{X_0t_0}V(X(t),t) \leqslant r(t;u_0,t_0) \leqslant K' u_0 \exp[-\beta(t-t_0)]. \tag{5.31}$$

由条件(H_5)及(5.31)有

$$k_1 E_{X_0t_0}|X(t)|^p \leqslant E_{X_0t_0}V(X(t),t) \leqslant K'V(X_0,t_0)\exp[-\beta(t-t_0)]$$
$$\leqslant K'k_2|X_0|^p \exp[-\beta(t-t_0)], \quad t \geqslant t_0.$$

从而有

$$E_{X_0t_0}|X(t)|^p \leqslant K|X_0|^p \exp[-\beta(t-t_0)], \quad t > t_0.$$

推论 5.37 假设存在一函数$V(X,t)$除满足定理5.36中的条件$(H_1^*)'$及(H_5)外，而条件(H_3^*)以$(H_3^*)'$来替代：

$(H_3^*)'$. $LV(X,t) \leqslant -kV(X,t)\ (X,t) \in E_l \times E_1^+$.

这里k为一正常数。

则随机系统k(5.1)的平凡解是指数p稳定的。

参考定理5.34推论的证明，这是显然的.该推论即为定理2.36(Nevel'son 和 Хасьминский 的结果)。

定理 5.38（几乎必然指数稳定性的比较准则） 假设存在一函数$V(X,t)$满足定理4.36中的所有条件。另外，关于辅助系统(5.2)'的假设(a_1)，(a_2)以下面的条件(H_8)来替代：

(H_8). $g \in C[E_1^+ \times E_1^+, E_1]$，$g(u,t)$关于$u$有直到二阶的连续导数，且$g''_{u^2}(u,t) \geqslant 0$.

则有

$$(ES) \Rightarrow (A.S.E.S).$$

【证明】 设$u = u(t;u_0,0)$为辅助系统(5.2)'的一个解，由于$g(0,t) \equiv 0$，$t \geqslant 0$，所以它是非负的，並由条件(H_8)保证了(5.2)'解的唯一性及其关于初值的连续依赖性。还有解$u(t;x_0,0)$关于初值u_0是二次可微的。

定义

$$W(X,t)\triangleq u(0;V(X,t),t),$$

因 $u=u(t;u_0,0)$，所以 $u_0=u(0;u,t)$，由(5.2)′解的唯一性，这是显然的. 从而有

$$V(X,t)=u(t;W(X,t),0),$$

由 Петровский[17]的第三章 §22 的习题知

$$\frac{\partial u(t;u_0,0)}{\partial u_0}=\exp[\int_0^t g_u'(u(s),s)ds]\geqslant 0, \qquad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 u(t;u_0,0)}{\partial u_0^2}=(\exp[\int_0^t g_u'(u(s),s)ds])\cdot\int_0^t g_{uu}''\{(u(s),s)$$

$$\times\exp[\int_0^s g_u'(u(v),v)dv]\}ds.$$

由(H_6)知

$$\partial^2 u(t;u_0,0)/\partial u_0^2\geqslant 0. \qquad (5.33)$$

于是对于 $X\neq 0$，我们有，

$$LV(X,t)=u_t'[t;W(X,t),0]+\frac{\partial u}{\partial u_0}LW(X,t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2}\sum_{ij=1}^{l}a_{ij}(X,t)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j}$$

$$=g(V(X,t),t)+\frac{\partial u}{\partial u_0}LW(X,t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2}|W_X\sigma(X,t)|^2 \quad (\text{由}(H_3^*))$$

$$\leqslant g(V(X,t),t).$$

故由(5.32)，(5.33)，即有 $LW(X,t)\leqslant 0$. 从而由 §5.2 的引理 5.20 知过程 $W(X(t),t)$ 是正上鞅，故由上鞅收敛定理推得（由定理的假设易知，上鞅收敛定理的条件满足），对任一 $X_0\in E_l$，$t_0\geqslant 0$，当 $t\to\infty$ 时，过程 $W(X(t),t)$ 几乎必然地收

敛到一个有限极限，因此有

$$\sup_t W(X(t),t)=A(X_0,t_0)<\infty, a.s.(P_{X_0t_0})$$

这里 $A(X_0,t_0)$ 为正随机变量。

再由常微辅助系统 (5.2)′ 平凡解的指数稳定性，就有

$$\begin{aligned}V(X(t),t)&=u(t;W(X(t),t),0)\\&\leqslant K'W(X(t),t)\exp[-\beta t]\\&\leqslant K'A(X_0,t_0)\exp[-\beta t],\ a.s.(P_{X_0t_0})\end{aligned}$$

再由条件(H_5)即得

$$|X(t)|\leqslant K(X_0,t_0)\exp[\alpha t], a.s.(P_{X_0t_0}),\ t\geqslant t_0. \blacksquare$$

下面的推论即为定理2.41(Nevel′son和Хасъминский的结果)。

推论5.39 在定理 5.36 推论的条件下，随机系统(5.1)的平凡解是几乎必然指数稳定的。

由定理 5.38 的证明，这是显然的。

二、Itô 方程解的几乎必然稳定性

在这一段中我们将给出随机系统：

$$dX(t)=b(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dW(t),$$
$$X(t_0)=X_0(\omega) \tag{5.10}$$

的平凡解的一般的几乎必然稳定性的比较准则。这里，我们将引用随机辅助系统：

$$du=g(u,t)dt+G(u,t)dW(t)$$
$$u(t_0)=u_0. \tag{5.14}$$

这里 $g(0,t)\equiv0$，$G(0,t)\equiv0$，并且记 $r(t;v_0,t_0)$ 为其存在于 $t\geqslant t_0$ 的最大解。

定理 5.40（几乎必然稳定性比较准则） 假设函数

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

满足下列条件：

(i)定理 5.15 的条件(ii)成立；

(ii)$V\in C[U(\rho)\times E_1^+,E_m]$，$V_t$，$V_X$ 和 V_{XX} 存在且连续，对于$(X,t)\in U(\rho)\times E_1$；并且有

$$dV(X,t)=a(X,t)dt+G(V(X,t),t)dW(t),$$
$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+.$$

这里 $a\in C[U(\rho)\times E_1^+,E_m]$，$g\in C[E_m\times E_1^+,E_m]$

$G\in C[E_m\times E_1^+,E_{mk}]$，$a(X,t)\leqslant g(V(X,t),t)$

$a(X,t)=LV(X,t)$.

(iii)对于$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$，有

$$b(|X|)\leqslant\sum_{i=1}^m V_i(X,t)\leqslant a(|X|,t).$$

这里 $a(\cdot,t),b(\cdot)\in\mathscr{K}$.

则由随机辅助系统 (5.14) 平凡解的几乎必然 等度 稳定性，就有随机系统(5.10)平凡解的几乎必然稳定性。

【证明】 让$X(t)$为(5.10)为的解过程，利用随机比较定理5.15知，如果 $X(t)\in U(\rho)$，　$t\geqslant t_0$，并且

$$V(X_0,t_0)\leqslant u_0,\ a.s. \tag{5.34}$$

则

$$V(X(t),t)\leqslant r(t;u_0,t_0),\ a.s. \tag{5.35}$$

让 $0<\varepsilon<\rho$ 和 $t_0\geqslant0$ 为给定的，因为随机辅助系统(5.14)的解 $u=0$ 是几乎必然等度稳定的，所以对给定的 $b(\varepsilon)>0$，$t_0\in J$，存在一正函数 $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)$，使当

$$\sum_{i=1}^m u_{i0}\leqslant\delta_1$$

时，就有

$$\sum_{i=1}^m u_i(t;u_0,t_0)<b(\varepsilon),\ a.s;\ t\geqslant t_0. \tag{5.36}$$

这里 $u(t;u_0,t_0)$为(5.14)的任一解过程，我们选取 u_0，使得

$$V(X_0,t_0)\leqslant u_0, \text{并且} \sum_{i=1}^{m} u_{i0}=a(|X_0|,t_0), \quad a.s. \qquad (5.37)$$

因为 $a(\cdot,t)\in\mathscr{K}$，于是我们可找到一个 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得同时有

$$|X_0|\leqslant\delta, \quad \text{且} \quad a(|X_0|,t_0)\leqslant\delta_1, \quad a.s. \qquad (5.38)$$

利用此δ，我们即可断言(5.10)的平凡解是几乎必然稳定的，假若不然，则一定存在一个解过程 $X(t)=X(t;X_0,t_0)$，其具有$|X_0|\leqslant\delta$，$a.s.$和一个 $t_1>t_0$，使得

$$|X(t_1)|=\varepsilon, \quad |X(t)|\leqslant\varepsilon, \quad t\in[t_0,t_1], \; a.s. \qquad (5.39)$$

由于 ε 的选取，其意味着 $X(t)\in\{X\in E_l: |X|\leqslant\varepsilon\}\subset U(\rho)$. 由(5.35)，(5.36)，(5.37)，(5.39)和假设(iii)导得矛盾：

$$b(\varepsilon)=b(|X(t_1)|)\leqslant\sum_{i=1}^{m}V_i(X(t_1),t_1)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}V_i(t_1;u_0,t_0)<b(\varepsilon), \quad a.s.$$

这就证明了我们的断言。 ∎

例 5.4 考虑 l 维线性 Itô随机系统

$$dX=A(t)Xdt+B(t)XdW. \qquad (5.40)$$

这里 $W(t)$为纯量标准 Wiener 过程，并且A和B是 $E_1\to E_l^2$ 的 $l\times l$ 连续矩阵函数。取

$$V(X)=(X^TPX)^{1/2},$$

这里 P 为一正定矩阵，并且 $b(t)$为矩阵

$$\frac{1}{2}P^{-1}[B^T(t)P+PB(t)]$$

的 l 重特征值，让 $a(t)$为矩阵

$$\frac{1}{2}P^{-1}[A^T(t)P+PA(t)+B^T(t)PB(t)]$$

的最大特征值，假设对于 $a>0$. 有

$$P\left\{\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\left[\int_{t_0}^{t}(a(s)-b^2(s))ds\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_0}^{t}b(s)dW(s)\leqslant -a\right\}=1,$$

则显然

$$dV(X)=a(X,t)dt+b(t)V(X)dW(t),$$

这里$a(X,t)\leqslant[a(t)-\frac{1}{2}b^2(t)]V(X)$，并且

$$a(X,t)=\frac{1}{2}(X^TPX)^{-\frac{1}{2}}[X^T(A^TP+PA+B^TPB)X]$$

$$-\frac{1}{8}(X^TPX)^{-\frac{3}{2}}\cdot[X^T(B^TP+PB)X]^2.$$

由第3章§3.1知，显然

$$du=(a(t)-\frac{1}{2}b^2(t))udt+bu(t)dW(t)$$

的平凡解是几乎必然一致渐近稳定的。因此，由同定理5.40类似的比较准则知，(5.40)的平凡解是几乎必然一致渐近稳定的。

[注] 基本定理5.40的证明，去证明其它几乎必然稳定性（如a.s.一致稳定，a.s.渐近稳定，a.s.一致渐近稳定等）等比较准则是不困难的，我们留给读者去叙述这些结果。

§5.5 关于Itô方程的不稳定性定理

微分方程解的不稳定性定理是微分方程稳定性理论的基本定理之一。对于Itô方程解的不稳定问题的研究，我们曾在第一篇第2章中介绍过Хасьминский的一些结果。本节

的目的是在基本比较定理的基础上，去建立 $\hat{\text{I}}\text{to}$ 方程解的随机不稳定性，指数 q 不稳定性以及几乎必然指数不稳定性的比较准则。这些比较准则均蕴含了第2章中 Хасъминский的相应结果。另外，随机不稳定性定理是确定性微分系统关于运动不稳定性定理对于随机微分系统的直接推广。

下面为了随机系统(5.1)有解 $X(t)\equiv 0$，我们引进假设：

$$b(0,t)\equiv 0,\quad \sigma(0,t)\equiv 0,\quad t\geqslant 0.$$

对于常微辅助系统，我们仍沿用

$$u'=g(u,t),\quad u(t_0)=u_0\geqslant 0. \tag{5.2$'$}$$

假设(a_1')．$g\in C[E_1^+\times E_1^+,E_1]$ 且 $g(u,t)$ 对每一 $t\in E_1^+$，关于 u 为凸函数；

(a_2')．$\rho(t;u_0,t_0)$ 为(5.2)′ 存在于 $t\geqslant t_0$ 的最小解；

(a_3)．$g(0,t)\equiv 0,t\geqslant 0$ 这一假设也意味着(5.2)′ 的解是非负的。

一、不稳定性概念

定义 5.13 随机系统(5.1)的平凡解是称为：

(1)**随机不稳定**的，如果对于某个正数 $\varepsilon'(<\rho)$ 及任一小的 $\delta>0,\varepsilon>0$，存在一个 $X_0(\neq 0)$，使得 $|X_0|\geqslant\delta$，且有

$$P_{X_0t_0}\{|X(t)|\geqslant\varepsilon',\text{对于某个 } t\geqslant t_0\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

(2)$q(>0)$ **不稳定**的，如果对于某个正数 $\varepsilon'(<\rho)$ 及任一小的 $\delta>0$，存在一个 $X_0(\neq 0)$ 及一个 $t_1\geqslant t_0$，使得 $|X_0|\leqslant\delta$，且有 $E_{X_0t_0}|X(t_1)|^q\geqslant\varepsilon'$．

(3)**指数 q 不稳定**的，如果对于某两个正常数 A 和 a，有

$$E_{X_0t_0}|X(t)|^q\geqslant A|X_0|^q\exp[a(t-t_0)]$$

对于所有 $t\geqslant t_0,X_0(\neq 0)\in E_n$.

如果 $q=1,2$，则对于定义(2)(或(3))，这就是通常所考虑的均值（指数）不稳定性及均方（指数）不稳定性。

(4) **几乎必然指数不稳定**的，如果对任一 $X_0(\neq 0)\in E_l$、$t_0\geqslant 0$，存在一常数 $r=0$ 及一个依赖于 X_0,t_0 的正随机变量 $K(X_0t_0)$，使得

$$|X(t)|\geqslant K(X_0,t_0)\exp[rt],t\geqslant t_0,\quad a.s.(P_{X_0t_0})$$

定义 5.14 常微辅助系统(5.2)′ 的平凡解是称为：

(1) **不稳定**的，如果对于某个 $\varepsilon_0>0$ 及任一小的 $\delta>0$，存在一个 $u_0(\neq 0)\leqslant\delta$，$t_1>t_0$ 及(5.2)′ 的一个解 $u(t;u_0,t_0)$，使得 $u(t_1;u_0,t_0)\geqslant\varepsilon_0$。

(2) **指数不稳定**的，如果对某两个正常数 B 和 β，存在(5.2)′ 的一个解 $u(t,;u_0,t_0)$使得

$$u(t;u_0,t_0)\geqslant Bu_0\exp[\beta(t-t_0)],$$

$$\text{对于所有的 } t\geqslant t_0,u_0(\neq 0)\in E_1^+.$$

为了便于讨论不稳定性定理，对于辅助系统(5.2)′，我们增加假设：

(a_4). $g(u,t)$在 $E_1^+\times E_1^+$上，满足关于 u 的局部 Lipschitz 条件。这一假设意味着(5.2)′ 的解是唯一的。

二、不稳定性比较准则

定理 5.41（q 不稳定性比较准则） 假设存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t)$：

(H_1). $V\in C[U(\rho)\times E_1^+,E_1^+]$，$V_t,V_X,V_{XX}$ 存在且连续，对于$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$。

(H_2). $g(V(X,t)t)-\partial V/\partial t\leqslant 0$，$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H_3). $LV(X,t)\geqslant g(V(X,t),t)$， $(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H_4). $V(X,t)\leqslant k|X|^q$，$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

其中 k 为一正常数。

则由常微辅助系统(5.2)′平凡解的不稳性就有随机系统(5.1)平凡解的 q 不稳定性。

【证明】 对所有$0<\delta<\rho$ 的 δ，由于辅助系统(5.2)′的平凡解是不稳定的，则一定存在一个正数 ε_0（不妨设其小于 $k\rho^q$），使对 $\delta'=k\delta^q>0$，总可找到一个 $u_0(\neq 0)<\delta'$ 及一个 $t_1>t_0$，使得 $u(t_1;u_0,t_0)\geqslant\varepsilon_0$.

于是对此 u_0，由条件(H_1)及(H_4)，一定存在一个 $X_0(\neq 0)$，使得$|X_0|<\delta$，且有

$$u_0=V(X_0,t_0)\leqslant k|X_0|^q<k\delta^q=\delta'.$$

从而由纯量 Ляпунов 函数的基本比较定理 5.2，並取 ρ' 满足$(\varepsilon_0/k)^{1/q}\leqslant\rho'<\rho$，则有

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\leqslant u(t_1;u_0,t_0)&\leqslant E_{X_0t_0}V(X(t_1\wedge\tau_{t_0}(\rho')),t_1)\quad(\text{由}H_4)\\&\leqslant kE_{X_0t_0}|X(t_1\wedge\tau_{t_0}(\rho'))|^q.\end{aligned}$$

从而推得

$$E_{X_0t_0}|X(t_1)|^q\geqslant E_{X_0t_0}|X(t_1\wedge\tau_{t_0}(\rho'))|^q\geqslant\frac{1}{k}\varepsilon_0=\varepsilon'.$$

亦即随机系统(5.1)的平凡解是 q 不稳定的。 ∎

定理 5.42 假设存在一个函数 $V(X,t)$ 除满足定理 5.41 的条件(H_1)和(H_4)外，还满足下面的条件

(H_3''). $LV(X,t)\geqslant C_\varepsilon>0$

对任一 $0<\varepsilon<\rho$, $|X|>\varepsilon$, $t>0$.

则随机系统的平凡解是随机不稳定的。

【证明】 设 $V(X,t)$ 为满足定理 5.42 条件的函数，令

$$W(X,t)=\frac{1}{V(X,t)},\quad X\neq 0.$$

由条件(H_1)，显然有

(i) $W(X,t)\in C_2{}^0(U(\rho)\times E_1{}^+)$.

另外，由(H_3)和(H_4)易见

(ii) $\lim\limits_{X\to 0}\inf\limits_{t\to 0} W(X,t)=\infty$.

再由($H_3{}''$)和(H_4)，当$\varepsilon<|X|<\rho$时，有

$$LW(X,t)\leqslant\frac{-1}{V^2(X,t)}LV(X,t)\leqslant\frac{-C_\varepsilon}{k^2\rho^{2q}}<0,$$

从而由定理 2.25 前的说明知，下面的条件(iii)成立。

(iii) (5.1)的解过程 $X(t)$满足第2章§2.6中的条件 D。

综上所述(i)—(iii)，並由定理 2.28 知(5.1) 的平凡解是随机不稳定的。 ∎

〔注〕 定理5.42就是确定性微分系统关于运动不稳定性定理对于随机微分系统的直接推广（参见秦元勋等[18]）。

定理 5.43（指数 q 不稳定性比较准则） 假设存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t)$：

(H_1^*). $V\in C[E_l\times E_1^+,E_1^+]$，$V_t$，$V_X$，$V_{XX}$存在且连续，

对于$(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

(H_2^*). 对任一$T>t_0$，关于(5.1)的解过程 $X(t)$有

$V_X(X(t),t)\sigma(X(t),t)\in M_W^2[t_0.T]$.

(H_3^{**}). $LV(X,t)\geqslant g(V(X,t),t)$，$(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

(H_5^*). $k_1|X|^q\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^q$，$(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

这里 k_1,k_2 为两个正常数。

则由常微辅助系统(5.1)′平凡解的指数不稳定性就有随机系统(5.1)平凡解的指数 q 不稳定性。

【证明】 首先条件(H_5^*)蕴含了关于纯量 Ляпунов 函数基本比较定理 5.4 中的条件(H_4^*)。

对任给的 $X_0\in E_l$($X_0\neq 0$，$t_0\geqslant 0$，假若常微辅助系统

(5.2)′的平凡解是指数不稳定的，则由定义5.14，一定存在数 $B>0,\beta>0$，对所有 $t\geqslant t_0$，皆有

$$u(t,u_0,t_0)\geqslant Bu_0\exp[\beta(t-t_0)].$$

选取 $u_0=V(X_0,t_0)$，故由关于纯量 Ляпунов 函数的基本比较定理 5.4，就有

$$E_{X_0t_0}V(X(t),t)\geqslant u(t,u_0,t_0)\geqslant Bu_0\exp[\beta(t-t_0)].$$

由此及条件(H_5^*)，有

$$k_2E_{X_0t_0}|X(t)|^q\geqslant E_{X_0t_0}V(X(t),t)\geqslant BV(X_0,t_0)\exp[\beta(t-t_0)]$$
$$\geqslant\beta k_1|X_0|^q\exp[\beta(t-t_0)],\quad t\leqslant t_0.$$

从而有

$$E_{X_0t_0}|X(t)|^q\geqslant A|X_0|^q\exp[\beta(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0.$$

由定义 5.13 即知，随机系统(5.1)的平凡解是指数 q 不稳定的。 ∎

推论 5.44 假设存在一个函数 $V(X,t)$，除满足定理 5.43 的条件(H_1^*)，(H_2^*)及(H_5^*)外，而条件(H_3^{**})以下面的条件($\tilde{H}_3$)来替代：

($\tilde{H}_3$). $LV(X,t)\geqslant kV(X,t)$，　$(X,t)\in E_l\times E_1^+$.

这里 k 为一正常数。

则随机系统(5.1)的平凡解是指数 q 不稳定的。

【证明】 由条件($\tilde{H}_3$)，我们可将常微辅助系统(5.2)′化简为

$$u'=ku,\quad u(t_0)=u_0>0,\quad t_0\geqslant 0.$$

显然，它是指数不稳定的，故由定理即得此推论。 ∎

[注] 类似于定理5.42的证明，易见此推论蕴含了定理2.39.

定理 5.45（几乎必然指数不稳定性比较准则） 假设存在一个满足下列条件的函数 $V(X,t)$：

(i) $V\in C[(E_l\setminus U(\rho)\times E_1^+, E_1^+]$，$V_t,V_X,V_{XX}$ 存在且连续，

$$对于(X,t)\in(E_l|U(\rho)\times E_1^+,$$

这里$U(\rho)$为任一原点小领域。

(ii) $k_1|X|^{-q}\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^{-q}$, $(q>0)$,

$$(X,t)\in(E_l|\{0\})\times E_1^+.$$

(iii) $LV(X,t)\leqslant g(V(X,t),t),(X,t)\in(E_l|\{0\})\times E_1^+$,

另外，关于辅助系统(5.2)′，除(a_3)外的所有假设以下面的条件来替代：

(iv) $g\in C[E_1^+\times E_1^+,E_1)$, $g(u,t)$关于u有直到二阶的连续导数且$g''_{u^2}(u,t)\geqslant 0$。

则由常微辅助系统(5.2)′平凡解的指数稳定性就有随机系统(5.1)平凡解的几乎必然指数不稳定性。

【证明】 设$u(t,u_0,0)$为辅助系统(5.2)′的一个解，由于$g(0,t)=0$, $t\geqslant 0$，所以它是非负的，並由条件(iv)，保证了(5.2)′解的唯一性及其关于初值的连续依赖性，还有解$u(t;u_0,0)$关于初值u_0是二次可微函数。定义

$$W(X,t)\triangleq u(0;V(X,t),t),$$

类似于定理5.38的证法，我们可证明过程$W(X(t),t)$为一正上鞅。故由上鞅收敛定理推得，对任一$X_0(\neq 0)\in E_l$, $t_0\geqslant 0$，当$t\to\infty$时，过程$W(X(t),t)$几乎必然地收敛到一个有限极限，因此有

$$\sup_t W(X(t),t)=A(X_0,t_0)<\infty,\ a.s.(P_{X_0t_0})$$

这里$A(X_0,t_0)$为一个依赖于X_0,t_0的正随机变量。再由常微辅助系统(5.2)′平凡解的指数稳定性，一定存在数$\beta>0$, $B>0$，使得对$u(t;u_0,0)$有

$$u(t;u_0,0)\leqslant Bu_0\exp[-\beta t],\quad t\geqslant 0.$$

从而有

$$V(X(t),(t)=u(t;W(X(t),t),0)\leqslant BW(X(t),t)\exp[-\beta t]$$

$$\leqslant BA(X_0,t_0)e^{-\beta t},\ a.s.\quad (P_{X_0t_0})$$

再由(ii)即得

$$|X(t)|\geqslant K(X_0,t_0)e^{rt},t\geqslant t_0,\ a.s.\quad (P_{X_0t_0}).$$

下面的推论即为定理 2.42。

推论 5.46 假设存在一个函数$V(X,t)$除满足定理5.45的条件(i)及(ii)外，而定理 5.45 的条件 (iii) 以下面的条件(iii)′来替代：

(iii)′ $LV(X,t)\leqslant -kV(X,t),(X,t)\in(E_l\setminus\{0\})\times E_1^+$，

则随机系统(5.1)的平凡解是几乎必然指数不稳定的。

事实上，由条件(iii)′，我们只要将辅助系统 (5.2)′ 化简为：

$$u'=-ku,\quad u(0)=u_0\geqslant 0.$$

再由定理即得此推论。

〔注〕关于利用比较方法来研究 Itô 方程部分变元的稳定性方面，国内也做了一些工作，由于篇幅限制，我们就不再在这里介绍了，有兴趣的读者可参考张炳根等〔19〕.

§5.6 关于随机 Ляпунов 函数的存在性

本节的目的是对于一类非时齐 Itô 随机微分系统与可分离变量的常微辅助系统，来建立§5.2的随机稳定性比较准则中的纯量 Ляпунов 函数及条件随机稳定性比较准则中的向量 Ляпунов 函数的存在定理(这些 Ляпунов 函数，我们就称其为随机 Ляпунов 函数)。这些存在定理的证明本身，也在理论上提供了以统一的方式构造随机 Ляпунов 函

数的方法，同时这些存在定理也是 Lakshmikantham and Leela[13] 中常微分方程稳定性与条件稳定性比较准则的逆定理，对于随机微分系统的推广。

考察下面一类非时齐 Itô 随机微分系统：

$$dX(t)=\mu(t)b(X(t))dt+(\mu(t))^{1/2}\sigma(X(t))dW(t)$$
$$X(t_0)=X_0(\in E_l),\ a.s. \tag{5.41}$$

其中$\mu(t)$为纯量非负有界、可测函数$t\in E_1^+$；

$b(X)$为l维向量函数，$X\in E_l$；

$\sigma(X)=(\sigma_{ij}(X))_{l\times k},\quad X\in E_l,\ \|\sigma\|^2=\sum_{i,j}|\sigma_{ij}|^2$；

$b(X)$与$\sigma(X)$相应地满足本章一开始所作的假设$(A_1),(A_2)$，並且还有$b(0)=0,\sigma(0)=0$。

对于非时齐 Itô 系统(5.41)，我们有一个相应的时齐随机辅助系统：

$$d\xi(t)=b\xi(t)dt+\sigma(\xi(t)dW(t)$$
$$\xi(0)=X_0(\in E_l),\quad a.s. \tag{5.42}$$

在假设(A_2)下，其解过程$\{\xi(t),t\geqslant 0\}$是一个连续的齐次扩散过程，並且也是一个齐次连续的 Felle 过程。

相应于(5.41)与(5.42)的偏微分算子分别记为：

$$L^*u(X,t)\triangleq\sum_{i=1}^{l}\mu(t)b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\mu(t)a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$\mathscr{L}^*u(X,t)\triangleq\sum_{i=1}^{l}b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

这里 $a_{ij}(X)\triangleq\sum_{h=1}^{k}\sigma_{ih}(X)\sigma_{jh}(X)$，显然 $L^*u=\mu(t)\mathscr{L}^*u$。

下面再引进常微辅助系统：

$$u_i'(t)=\lambda_i(t)\varphi_i)(u),\quad u_i(0)=u_{i0}\geqslant 0, \tag{5.43}$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

假设(a_1). $\lambda_i(t)\in C[E_1^+,E_1^+]$, $\varphi_i(u)\in C[E_m^+,E_1^+]$,

$$\text{且 } u>0,\varphi_i(u)>0;$$

(a_2). $\varphi_i(u)$ $(i=1,2,\cdots,m)$为拟单调非降的凹函数；

(a_3). $\varphi_i(0)=0$, $i=1,2,\cdots,m$.

对于随机系统(5.41)和常微辅助系统(5.43)，由定理5.16我们有下面的**条件随机稳定性比较准则**：

假设存在一函数$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$满足下列条件：

(H_1). $V\in C[U(\rho)\times E^+,E_m^+]$, V_t,V_X,V_{XX}存在且连续，

对于$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H_2). $\lambda_i(t)\varphi_i(V(X,t))-\partial V_i/\partial t\geqslant 0$,

$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$, $i=1,2,\cdots,m$.

(H_3). $\partial V_i/\partial t+L^*V_i(X,t)\leqslant\lambda_i(t)\varphi_i(V(X,t))$

$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$, $i=1,2,\cdots,m$.

(H_4), $V_i(X,t)\equiv 0, i=1,2,\cdots,h$, 对于$X\in M_{(l-h)}$.

(H_5), $V(0,t)\equiv 0$, 并且$\sum_{i=1}^{m}V_i(X,t)\geqslant b(X)$,

$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$, 这里$b(X)\in\mathscr{PK}$.

则由常微辅助系统(5.43)平凡解的条件等度稳定性就有随机系统(5.41)平凡解的条件随机稳定性。

特别当$m=1,h=0$时（因$h=0$，则，$M_{(l-h)}=E_l$），上面的条件随机稳定性的比较准则就化为随机稳定性的比较准则。

一、关于纯量随机 Ляпунов 函数的存在性

我们先讨论随机稳定性比较准则中的纯量Ляпунов函

数的存在性，即在上面准则中，当 $m=1, h=0$ 时的情形。此时，常微辅助系统(5.43)化为

$$u' = \lambda(t)\varphi(u),\ u(0) = u_0 \geqslant 0, \qquad (5.43)'$$

这里 $\lambda(t), \varphi(u)$ 满足相应的条件 $(a_1), (a_2), (a_3)$。

定义 5.51

$B \triangleq \{f: f(\cdot): E_l \to E_1$ 的有界 Borel 可测函数$\}$。

$C \triangleq \{f: f(\cdot): E_l \to E_1$ 的有界连续函数$\}$。

$C^* \triangleq \{f: f \in C$ 且 $f(0) = 0\}$。

$$\|f\| = \sup_{X \to E_l} |f(X)|.$$

容易验证：C^* 为 Banach 空间 C 的子空间，而 C 又为 Banach 空间 B 的子空间。

考虑从 $B \to B$ 的有界线性算子 T_t：

$$T_t f(X) = \int_{E_l} f(Y) P(t, X, dY) = E_X f(\xi(t)),\quad t \geqslant 0.$$

这里 $P(t, X, A) = P_X\{\xi(t) \in A\}$，对任一 Borel 集 $A \in E_l$，它为随机辅助系统(5.42)的解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 的转移函数。

$\{T_t, t \geqslant 0\}$ 为解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 所确定的在 B 上的**单参数压缩算子半群**。

令

$$\tilde{B}_0 \triangleq \{f: f \in B,\ \exists W \lim_{t \downarrow 0} T_t f = f\},$$

$$D_{\tilde{A}} \triangleq \{f: f \in \tilde{B}_0,\ \exists W \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h f - f}{h} = \tilde{A} f = g \in \tilde{B}_0\},$$

这里的极限均为弱极限。

则由此所决定的算子 $\tilde{A}$，称为解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 的**弱无穷小算子**，$D_{\tilde{A}}$ 称为 $\tilde{A}$ 的定义域。

对每一 $\lambda>0$，作线性算子：

$$\tilde{R}^{\lambda} f(X) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T_t f(X) dt = E_X \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(\xi(t)) dt,$$

$f \in \tilde{B}_0$。$\tilde{R}^{\lambda}$ 对 $f \in \tilde{B}_0$ 有定义而且是有界线性算子，其称为解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 的**豫解算子**。

特别当 $\lambda = 0$ 时，

$$\tilde{R} f(X) = \int_0^{\infty} T_t f(X)\, dt = \int_0^{\infty} E_X f(\xi(t)) dt,\ f \in \tilde{B}_0,$$

称为解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 的**位势**。

以 $A_{U(\rho)}$ 记为解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 的停止过程：

$$\{\tilde{\xi}(t), t \geqslant 0\} = \{\xi(t \wedge \tau(\rho)), t \geqslant 0\}$$

的弱无穷小算子。

$D_{\tilde{A}_{U(\rho)}}$ 记为 $A_{U(\rho)}$ 的定义域。

停止过程 $\{\tilde{\xi}(t), t \geqslant 0\}$ 的豫解算子及位势算子分别为：

$$\tilde{R}_U^{\lambda}(\rho) f(X) = E_X \int_0^{\tau(\rho)} e^{-\lambda t} f(\xi(t)) dt,\quad f \in \tilde{B}_0,$$

$$R_U(\rho) f(X) = E_X \int_0^{\tau(\rho)} f(\xi(t)) dt,\quad f \in \tilde{B}_0.$$

引理 5.47 如果随机辅助系统(5.42)的平凡解是弱随机稳定的，则其解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 所决定的半群 $\{T_t, t \geqslant 0\}$ 对于空间 C^* 不变，即 $T_t C^* \subset C^*$。

【证明】 首先因解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 是一个Feller过程，故有 $T_t C^* \subset C$。

其次，对任一 $f \in C^*$ 及 $\forall \frac{\varepsilon}{1+M} > 0$（这里 $M = \|f\|$，由 f 在原点的连续性，一定存在一个正数 $\delta_1 < \rho$，使当 $\|X\| < \delta_1$ 时，有 $|f(X)| < \frac{\varepsilon}{1+M}$。再由解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 关于原点的弱随机

稳定性，则对给定的正数 $\varepsilon'<\delta_1$ 及 $\frac{\varepsilon}{1+M}>0$，存在一正数 $\delta<\rho$，使当 $|X|<\delta$ 时，对任一 $t\geqslant 0$，有

$$P(t,X,E_l|U(\varepsilon'))=P_X\{\xi(t)\in E_l|U(\varepsilon')\}<\frac{\varepsilon}{1+M}.$$

于是对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $|X|<\delta$ 时，就有

$$\begin{aligned}|T_tf(X)|&\leqslant\left|\int_{U(\varepsilon')}f(Y)P(t,X,dY)\right|\\&\quad+\left|\int_{E_l|U(\varepsilon')}(Y)P(t,X,dY)\right|\\&\leqslant\int_{U(\varepsilon')}|f(Y)|P(t,X,dY)\\&\quad+\int_{E_l|U(\varepsilon')}|f(Y)|P(t,X,dY)\\&<\frac{\varepsilon}{1+M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{1+M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而

$$T_tC^*\subset C^*.\quad ∎$$

由引理 5.47，我们自然可在 C^* 空间上来考虑弱随机稳定的辅助系统(5.42)的解过程 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 所对应的半群 $\{T_t,t\geqslant 0\}$。

同样定义 $\tilde{C}_0^*\triangleq\{f:f\in C^*,\ \exists\ W\lim\limits_{t\downarrow 0}T_tf=f\}$，

$$D_{\tilde{A}^*}\triangleq\{f\in\tilde{C}_0^*,\ \exists\ W\lim_{h\downarrow 0}\frac{T_hf-f}{h}=\tilde{A}^*f=g\in\tilde{C}_0^*\}.$$

并且也可同样定义在 $\tilde{C}_0^*$ 上，解过程 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 的豫解算子 $\tilde{R}^{\lambda *}$ 及位势算子 $\tilde{R}^*$。

引理 5.48 如果随机辅助系统 (5.42) 的解过程 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 满足条件：

(C_1'). 对任一正数 $\varepsilon<\rho$ 及任一 $X\in U(\rho)$，都有

$$P_X\{|\xi|(t)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\alpha(t)B(|X|),\quad t\geqslant 0.$$

（这一条件意味着随机辅助系统(5.42)的平凡解是弱随机稳定的）

这里 $\alpha(t),t\geqslant 0$ 为非负有界可积函数，$\beta(r)\in\mathscr{K}$。则必存在一个满足下列条件的函数 $W(X)$：

(B_1)。$W(X)\in D_{\tilde{A}U(\rho)}$。

(B_2)。$W(0)=0,X\neq 0$ 时 $W(X)>0$ 且连续有界，对于 $X\in U(\rho)$。

(B_3)。$A_{U(\rho)}W(X)\leqslant 0$。

【证明】 我们选取一个在闭球 $\bar{U}(\rho)$ 外等于0，且 $h(0)=0$；$X(\neq 0)\in U(\rho),h(X)>0$ 的连续函数 h。定义

$$W(X)\triangleq\tilde{R}_{U(\rho)}h(X)=E_X\int_0^{\tau(\rho)}h(\xi(t))dt$$

$$h\in\tilde{C}_0^*\subset\tilde{C}_0\subset\tilde{B}_0.$$

因为 $P(t,X,A)$ 随机连续，故由半群理论知：

$$P(t,X,A)\text{随机连续}\Leftrightarrow\text{对任一 } f\in C \text{ 有} W\lim_{t\downarrow 0}T_tf=f.$$

故 $\tilde{C}_0=C$，而 $\tilde{C}_0^*=C^*\tilde{C}_0=C^*C=C^*$，故 $h\in C^*=\tilde{C}_0^*$ 这里的 $\tilde{R}_{U(\rho)}$ 为解过程的停止过程 $\{\tilde{\xi}(t),t\geqslant 0\}=\{\xi(t\wedge\tau(\delta),t\geqslant 0\}$ 在 B 上所对应的位势算子。

首先，我们证明在条件下(C_1')，上面定义的 $W(X)$ 是确定的，亦即定义式中的积分存在且有限。

事实上，由所选取的连续函数 $h(X)$ 在 $\bar{U}(\rho)$ 外等于0，所以

$$W(X)=\tilde{R}_{U(\rho)}h(X)=\int_0^\infty E_Xh(\tilde{\xi}(t))dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T E_Xh(\tilde{\xi}(t))dt$$

对 $\forall T>0$，由 $h(X)$ 在原点的连续性，$\exists\varepsilon(T)>0$，使当 $|X|<\varepsilon$ 时，就有 $h(X)<\frac{1}{T^{\alpha}}(\alpha>1)$，于是有

$$E_X h(\tilde{\xi}(t))=\int_{\{\tilde{\xi}<\varepsilon\}} h(\tilde{\xi}(t))P_X(d\omega)+\int_{\{|\tilde{\xi}(t)|\geqslant\varepsilon\}} h(\tilde{\xi}(t))P_X(d\omega)$$

$$<\frac{1}{T^{\alpha}}+\|h\|P_X\{\tilde{\xi}(t)|\geqslant\varepsilon\}.$$

故由条件(C_1)就有

$$W(X)=\tilde{R}_{U(\rho)}h(X)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T E_X h(\tilde{\xi}(t))dt$$

$$\leqslant\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{1}{T^{\alpha}}dt+\|h\|\int_0^T \alpha(t)\beta(|X|)dt]$$

$$=\|h\|\beta(|X|)\int_0^\infty \alpha(t)dt\leqslant M\|h\|\beta(\rho),$$

这里 $M=\int_0^\infty \alpha(t)dt<\infty)$。

其次，因 $W(X)=\tilde{R}_{U(\rho)}h)(X)$，故由半群理论（见Dynkin[14]的定理1.7′）知 $W(X)\in D_{\tilde{A}_{U(\rho)}}$，即条件$(B_1)$满足。

再次，因 $W(X)=\tilde{R}_{U(\rho)}h(X)=E_X\int_0^{\tau(\rho)}h(\xi(t))dt$，而且当 $\xi(t)(\neq 0)\in U(\rho)$，时 $h(\xi(t))>0$，同时当 $X\in U(\rho)$ 时，$P_X\{\tau(\rho)>0\}=1$，故当 $X\neq 0$ 且 $X\in U(\rho)$ 时，$W(X)>0$。另外，因 $h\in C^*=\tilde{C}_0^*$，所以

$$W(X)=\tilde{R}_{U(\rho)}h(X)=\tilde{R}^*_{U(\rho)}h(X)\in D_{\tilde{A}^*_{U(\rho)}}\subset C^*_{U(\rho)},$$

故 $W(0)=0$，且在 $U(\rho)$ 中连续有界，即条件(B_2)满足。

最后，因 $W(X)=\tilde{R}_{U(\rho)}h(X)$，$h\in\tilde{C}_0^*\subset\tilde{C}_0\subset\tilde{B}_0$，且 $W(X)$ 有界，故由半群理论（见Dynkin[14]的定理1.7′）知，方程 $W=\tilde{R}_{U(\rho)}h$，$(h\in\tilde{B}_0)$ 有唯一的解 $h=-\tilde{A}_{U(\rho)}W$，即

$$\tilde{A}_{U(\rho)}W(X)=-h(X)\leqslant 0,$$

亦即条件(B_3)满足。 ▮

定理 5.49（纯量随机 Ляпунов 函数的存在性） 对于随机辅助系统(5.42)的解过程$\{\xi(t), t\geqslant 0\}$，假设其满足引理5.48中的条件(C_1')。

对于常微辅助系统(5.43)，假设有

(C_2'). 对于某个$u_0>0$及$t\geqslant 0$，有

$$-\int_0^{u_0}\frac{ds}{\varphi(s)}\leqslant\int_0^t\lambda(s)ds<\int_{u_0}^{\infty}\frac{ds}{\varphi(s)}.$$

（这一条件意味着常微辅助系统(5.43)′的平凡解是稳定的）。

(C_3'). $\varphi'(u), \varphi''(u)$存在且连续，对于$u\geqslant 0$.

(C_4'). 常微辅助系统(5.43)的解$u(t;u_0,0)$满足

$$u(t;u_0,0)\geqslant r(u_0),\ 对于\ t\geqslant 0.$$

这里$r\in\mathscr{K}$.

则对于非时齐 Itô 随机系统(5.41)，存在一个函数$V(X,t)$，其具有下面的性质：

(H_1'). $V\in C[U(\rho)\times E_1^+, E_1^+]$, V_t, V_X, V_{XX}存在且连续，对于$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H_2'). $\lambda(t)\varphi((V(X,t))-\partial V/\partial t\geqslant 0, (X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H_3'). $\partial V/\partial t+L^*V\leqslant\lambda(t)\varphi(V(X,t))$

$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$$

(H_4'). $V(0,t)=0$, 且$V(X,t)\geqslant b(X)$,

$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$$

这里$b(X)\in\mathscr{PK}$.

【证明】 首先，条件(C_3')保证了常微辅助系统(5.43)解的存在唯一性及其关于初值的连续依赖性，还有解$u(t;u_0,$

0)关于初值 u_0 是二次可微函数。

由条件(C_2')及 Lakshmikantham[13] 的推论3 8.3.1知，辅助系统(5.43)′ 的平凡解 $u=0$ 是稳定的，其解 $u(t;u_0,0)$ 是单调增函数，而且还可用下列方式表示：定义

$$J(u)=\int_0^u \frac{ds}{\varphi(s)},\ \text{如果}\int_0^u \frac{ds}{\varphi(s)}<\infty.$$

否则，对于充分小的 $\varepsilon>0$，

$$J(u)=\int_\varepsilon^u \frac{ds}{\varphi(s)},\ \text{如果}\int_0^u \frac{ds}{\varphi(s)}=R\leqslant\infty,$$

则 $J(u)$ 是单调增函数，所以它是从$[0,\infty)$到$[0,R)$的同胚映射，并且(5.43)′ 的解 $u(t;u_0,0)$ 可由

$$J[u(t;u_0,0)]=J(u_0)+\int_0^t \lambda(s)ds \tag{5.44}$$

给定，只要条件(C_2')满足。因 J 是一个同胚，故由(5.44)亦可顺便看出(5.43)′ 的平凡解是稳定的，且 $u(t,u_0,0)$ 是 t 的单调增函数。

其次，对于随机辅助系统(5.42)由条件(C_1')及引理5.48，一定存在一个满足引理 5.48 中条件(B_1)，(B_2)，(B_3)的函数

$$W(X)=E_X\int_0^{\tau(\rho)} h(\xi(t)dt,$$

这里$\{\xi(t),t\geqslant0\}$为随机辅助系统(5.42)的解过程。

定义

$$V(X,t)\triangleq u(t;W(X),0).$$

这里 $u(t;u_0,0)$ 为常微辅助系统(5.43)′ 的解．

由于系统(5.42)的解过程$\{\xi(t),t\geqslant0\}$为扩散过程，故有

$$\tilde{A}f(X)=\sum_{i=1}^{l}b_i(X)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\mathscr{L}^*f(X), \tag{5.45}$$

这里 $f(X)$ 为任一个二次连续可微而且在有界集外等于0的函数。

从而由引理5.48及 $u(t;u_0,0)$ 的连续性和 $u=0$ 是(5.43)′的平凡解(其保证(5.43)′有非负解)，即可推得 $V\in C[U(\rho)\times E_1^+, E_1^+]$，再由 $W(X)\in D_{\tilde{A}U(\rho)}$，故 $W(X)$ 是二次连续可微的，并由条件(C_3')知 $u(t;u_0,0)$ 关于初值 u_0 是二次连续可微的，故 V_t, V_X, V_{XX} 对于 $(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$ 存在且连续，于是条件(H_1')满足。

由于

$$\begin{aligned}\partial V/\partial t &= u'[t;W(X),0]=\lambda(t)\varphi[u(t;W(X),0)]\\ &=\lambda(t)\varphi(V(X,t)).\end{aligned}$$

故得

$$\lambda(t)\varphi(V(X,t))-\partial V/\partial t=0,\quad (X,t)\in U(\rho)\times E_1^+.$$

所以条件(H_2')满足，又因

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}+L^*V &= u'[t;W(X),0]+\mu(t)\sum_{i=1}^{l}b_i(X)\frac{\partial V}{\partial x_i}\\ &\quad+\frac{1}{2}\mu(t)\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\\ &=\lambda(t)\varphi[u(t;W(X),0]\\ &\quad+\frac{\partial u}{\partial u_0}\mu(t)\left[\sum_{i=1}^{l}b_i(X)\frac{\partial W}{\partial x_i}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial x_j}\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2}\mu(t)\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j}\\ &=\lambda(t)\varphi(V(X,t)+\frac{\partial u}{\partial u_0}\mu(t)\mathscr{L}^*W(X)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2}\mu(t)\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j}, \quad (X,t)\in U(\varrho)\times R_1^+ \tag{5.46}$$

由引理 5.48 及(5.45)知

$$\mathscr{L}^*W(X)=\tilde{A}_{U(\rho)}W(X)\leqslant 0. \tag{5.47}$$

由(5.44)我们有

$$\frac{\partial u}{\partial u_0}=\frac{\varphi[u(t,u_0,0)]}{\varphi(u_0)}\geqslant 0. \tag{5.48}$$

而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u_0{}^2}=\frac{\varphi[u(t;u_0,0)]}{\varphi^2(u_0)}\{\varphi'[u(t,u_0,0)]-\varphi'(u_0)\}, \tag{5.49}$$

由常微辅助系统(5.43)的假设(a_2)，$\varphi(u)$是凹函数，故$\varphi'(u)$为单调减函数，而前面我们已知系统(5.43)′的解$u(t;u_0,0)$是单调增函数，故推得

$$\varphi'[u(t;u_0,0)]-\varphi'(u_0)\leqslant 0.$$

从而由(5.49)，我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2}\leqslant 0. \tag{5.50}$$

再因

$$\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(X)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j}=|W_X\sigma(X)|^2, \tag{5.51}$$

从而由(5.47)，(5.48)，(5.50)，(5.51)以及$\mu(t)$的非负性得

$$\mu(t)\frac{\partial u}{\partial u_0}\mathscr{L}^*W(X)\leqslant 0,$$

$$\mu(t)\frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2}\sum_{i,j=1}^{l}q_{ij}(X)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j}\leqslant 0,$$

于是从(5.46)即得

$$\frac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\leqslant\lambda(t)\varphi(V(X,t)),$$

$$(X,t)\in U((\rho)\times E_1^+$$

所以(H_3')满足。显然，

$$V(0,t)=u(t,W(0),0\ (\text{由引理 5.48 的}(B_2))$$
$$=u(t;0,0)\ (\text{因}u\equiv0\text{是}(5.43)'\text{的解})$$
$$\equiv0,$$

同时

$$V(X,t)=u(t;W(X),0)\ (\text{由条件}(C_4'))$$
$$\geqslant r(W(X))=b(X),\quad (X,t)\in U(\rho)\times E_1^+.$$

这里 $r\in\mathscr{K}$，从而 $b(0)=r(W(0))=r(0)=0$，且 $X\neq0$ 时，因 $W(X)>0$，故有

$$b(X)=r(W(X))>0.$$

再由 W 及 r 的连续性即知 $b\in C[U(\rho),E_1^+]$，于是条件(H_4')成立。 ▌

推论 5.50 如果时齐随机系统(5.42)的解过程 $\{\xi(t),t\geqslant0\}$满足条件(C_1')，则对于系统(5.42)，存在一个具有下面性质的函数 $V(X)$：

(h_1')．$V\in C[U(\rho),E_1^+]$，V_X，V_{XX} 对于 $X\in U(\rho)$ 存在且连续。

(h_2')．$\mathscr{L}^*V(X)\leqslant0$，$X\in U(\rho)$．

(h_3')．$V(0)=0$，$X\neq0$，$V(X)>0$，$X\in U(\rho)$．

【证明】 这时只需将常微辅助系统(5.43)′化简为：

$$u'(t)=0,\quad u(0)=u_0\geqslant0. \qquad (5.43)''$$

亦即在原来的常微辅助系统(5.43)′中，令

$\lambda(t)\equiv0$，$\varphi(u)$为满足：

(a_1)．$\varphi(u)\in C[E_1^+,E_1^+]$，$\varphi(0)=0$ 且 $u>0$，$\varphi(u)>0$．

(a_2)．$\varphi(u)$是凹函数，且 $\varphi'(u)$，$\varphi''(u)$ 存在且连续，

对于 $u\geqslant 0$

的任一函数。此时定理 5.49 中的条件 (C_2'), (C_3') 满足。另外，取 $r(s)=s$, 显然 $r\in\mathscr{K}$, 于是常微辅助系统(5.43)″的解

$$u(t;u_0,0)\equiv u_0=r(u_0).$$

因此，定理 5.49 中的条件(C_4')也满足。从而对于辅助系统(5.43)″,定理 5.49 中的条件(C_1')—(C_4')均满足，故由定理 5.49，一定存在一个函数

$$V(X)=u(t;W(X),0)\equiv W(X)=E_X\int_0^{\tau(\rho)} h(\xi(t))dt,$$

其满足条件(h_1'), (h_2'), (h_3)。 ∎

此推论即为 K.shner[16]中的定理 2 的推广。

推论 5.51 如果时齐随机辅助系统(5.42)满足条件(C_1')，而常微辅助系统(5.43)′满足条件(C_2'), (C_3'), $C_4')$，则非时齐 Itô 随机微分系统(5.41)是随机稳定的。

这是因为由定理 5.50，对于非时齐Itô 随机微分系统(5.41)，存在一个满足当 $m=1, h=0$ 时的定理 5.16 的条件(H_1)—(H_3), (H_5)的函数 $V(X,t)$，并由条件(C_2')知常微辅助系统(5.43)′ 的平凡解是稳定的，故由 $m=1, h=0$ 时的定理 5.16 知，非时齐 Itô 随机微分系统(5.41)是随机稳定的.

二、关于向量随机 Ляпунов 函数的存在性

现在我们将讨论在条件随机稳定性比较准则中的向量 Ляпунов 函数的存在性问题.这里所采用的方法是定理5.49 所采用的方法的推广。在证明此存在定理之前，我们先作些准备。

定义 5.16 $(l-h)$维流形 $M^*_{(l-h)}$是称为关于随机辅助系统(5.42)的解过程$\{\xi(t),\ t\geqslant 0\}$是**不变**的，如果 $P_X\{\xi(t)\in$

$M^*_{(l-h)}$，对于所有的 $t\geqslant 0\} = 1$，对于所有的$X\in M^*_{(l-h)}$.

例 5.5

$$dx_1(t) = x_2(t)dt + \sigma x_1(t)dW(t) \quad (\sigma \text{ 为常数}),$$
$$dx_2(t) = -(x_1(t) + x_2(t))dt. \tag{5.52}$$

则 $M_1^* \triangleq \{x_1, x_2) \in E_2 : x_1 = 0\}$ 即为随机系统(5.52)的解过程的不变流形.

事实上，因对任一 x_2，总存在 $R>0$，使得 $x_2 \in [-R, R]$，令

$$G \triangleq \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in [-R, R]\},$$

因(5.52)的

$$\begin{pmatrix} a_{11}(X) & a_{12}(X) \\ a_{21}(X) & a_{22}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故对 ∂G 的外法矢量 $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (0, R)$ 或 $(0, -R)$，在∂G上有 $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X)\nu_i\nu_j = 0$（这里 ∂G 表 G 的边界）.另外,

$$\rho(X) = d(X, G) = \begin{cases} |x_1|, & \text{如 } x_1 = 0. \\ |x_2 - R|, & \text{如 } x_1 = 0, x_2 \notin (-R, R). \end{cases}$$

$\rho(X)$ 定义在 $E_2 \diagdown (-R, R)$ 上，显然

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} = 0, \quad X \in E_2 \diagdown (-R, R).$$

故在 ∂G 上有

$$\sum_{i=1}^{2} b_i(X)\nu_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{2} b_i(X)\nu_i = -R^2 < 0.$$

于是由 Friedman[12] 的定理 12.2.1 知

$$G \triangleq \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in [-R, R]\}$$

为系统(5.52)的不变集，从而$M_1^* \triangleq \{X \in E_2 : x_1 = 0\}$ 为随机系统(5.52)的一维不变流形.

对于常微辅助系统(5.43)，我们引进其伴随辅助系统：

$$u'(t)=\lambda(t)\varphi^*(u),\quad u(0)=u_0\geqslant 0. \tag{5.43)*}$$

这里

$$\lambda(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \vdots\\ \lambda_m(t)\end{pmatrix},\quad \varphi^*(u)=\begin{pmatrix}\varphi_1(u_1,0,\quad\cdots)\\ \varphi_2(0,u_2,0,\cdots)\\ \vdots\\ \varphi_m(0,\cdots,0,u_m)\end{pmatrix}$$

鉴于$\varphi(u)$的拟单调非降性，并因$u_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，故有

$$\varphi^*(x)\leqslant\varphi(u). \tag{5.53}$$

如果$U(t)=U(t;u_0,0)$和$U^*(t)=U^*(t;v_0,0)$分别为系统(5.43)和(5.43)*过同一点$(u_0,0)$的解，则由推论4.10及(5.53)推得

$$U^*(t)\leqslant U(t),\quad t\geqslant 0. \tag{5.54}$$

下面定义m个初始向量:

$$p_1=(u_{10},0,\cdots,0)$$

$$p_2=(u_{10},u_{20},0,\cdots,0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_i=(u_{10},\cdots,u_{i0},0,\cdots,0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_m=(u_{10},u_{20},\cdots,u_{m0})$$

这里$u_{i0}\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m$。易见

$$P_i\leqslant P_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,m-1.$$

由伴随系统(5.43)*过点$(p_i,0)$的解为

$$U_i^*(t)=U_i(t;p_i,0)=\begin{pmatrix}u_{i1}(t;p_i,0)\\ u_{i2}(t;p_i,0)\\ \vdots\\ x_{im}(t;p_i,0)\end{pmatrix}$$

对$\forall i=1,2,\cdots,m$。

由推论 4.10 得

$$U_i^*(t) \leqslant U_{i+1}^*(t),\quad t \geqslant 0.$$

这里 $U_i^*(t)$，$U^*_{+1}(t)$ 分别为伴随系统 (5.43)*过 $(p_i, 0)$ 和 $(p_{i+1}, 0)$ 的解。这意味着对每一 $j=1,2,\cdots,m$ 和 $t \geqslant 0$，有

$$u_{1j}(t,p_1,0) \leqslant u_{2j}(t,p_2,0) \leqslant \cdots \leqslant u_{mj}(t;p_m,0). \qquad (5.55)$$

现在我们来建立下面的存在定理。

定理 5.52（向量随机 Ляпунов 函数的存在性） 对于随机辅助系统(5.42)假设有

(C_1). 随机辅助系统(5.42)解过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 满足：对任一 $\varepsilon(0 \leqslant \varepsilon < \rho)$，有

$$P_X\{|\xi(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \alpha(t)\beta(|X|),\quad 对任一 X \in M^*_{(l-h)},\quad t \geqslant 0.$$

这里 $\alpha(t)$ $(t \geqslant 0)$ 为非负有界可积函数，$\beta \in \mathscr{K}$，$M^*_{(l-h)}$ $(h<l)$ 为随机辅助系统(5.42)的解过程的不变流形（此条件意味着随机辅助系统(5.42)的平凡解关于解过程的不变流形 $M^*_{(l-h)}$ 是条件弱随机稳定的）。

对于常微辅助系统(5.43)假设有

(C_2). 对于某个 $u_0 \geqslant 0$ 及某个 $t \geqslant 0$，有

$$-\int_0^{u_{i0}} \frac{du_i}{\varphi_i(0,\cdots,0,u_i,0,\cdots,0)} \leqslant \int_0^t \lambda_i(s)\,ds < \int_{u_{i0}}^{\infty} \frac{du_i}{\varphi_i(0,\cdots,0,u_i,\cdots,0)},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

(C_3) $D\varphi_i(u), D^2\varphi_i(u)$ 存在且连续，对于 $u \geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m$.

(C_4). 伴随系统(5.43)* 的解 $U_m^*(t;p_m,0)$ 满足

$$u_{mm}(t;p_m,0) \geqslant r\left(\sum_{i=1}^{m} u_{i0}\right),\quad t \geqslant 0.$$

如果 $u_{i0}=0, i=1,2,\cdots,h$. 这里 $r \in \mathscr{K}$.

则对于非时齐的 Itô 随机微分系统(5.41)存在一个具有下面性质的向量函数 $V(X,t)=(V_1(X,t)\cdots,V_m(X,t))^T$:

(H₁). $V\in C[U(\rho)\times E_1^+, E_m^+]V_t, V_X, V_{XX}$ 存在且连续，对于 $(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H₂). $\lambda(t)\varphi(V(X,t))-\dfrac{\partial V}{\partial t}\geqslant 0$, $(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H₃). $\dfrac{\partial V}{\partial t}+L^*V(X,t)\leqslant\lambda(t)\varphi(V(X,t))$,

$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$.

(H₄). $V_i(X,t)\equiv 0, i=1,2,\cdots,h$, 对于 $X\in M^*_{(l-h)}$.

(H₅). $V(0,t)\equiv 0$, 并且 $\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(X,t)\geqslant b(X)$,

$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+$,

这里 $b(X)\in\mathscr{PK}$.

【证明】 选取在闭球 $U(\rho)$ 外等于 0 的向量函数 h:

(i). $h\in C[E_l, E_m^+]$ 且 $h(0)=0, X\neq 0, h(X)>0$;

(ii). $h_i(X)=0, i=1,2,\cdots,h$, 如果 $X\in M^*_{(l-h)}$.

如同定理 5.49 证明中的作法，置

$$W_i(X)=\tilde{\boldsymbol{R}}_{U(\rho)}h_i(X)=E_X\int_0^{\tau(\rho)}h_i(\xi(t))dt,$$

$$i=1,2,\cdots,m.\quad X\in U(\rho).$$

这里$\{\xi(t),t\geqslant 0\}$为随机辅助系统(5.42)的解过程.

然后，我们定义向量函数 $V(X,t)$ 如下:

$$\left.\begin{array}{l}V_1(X,t)=u_{11}(t;W_1(X),0,\cdots,0,0)\\V_2(X,t)=u_{22}(t,W_1(X),W_2(X),0,\cdots 0,0)\\\cdots\cdots\\V_m(X,t)=u_{mm}(t;W_1(X),\cdots,W_m(X),0)\end{array}\right\}\qquad(5.56)$$

由条件(C_3)以及定理5.49的相应证明，即知

$$V(X,t)=(V_1(X,t),\cdots,V_m(X,t))^T$$

满足条件(H_1)。

由于$\varphi(u)$是拟单调非降的，并且解$U_1^*(t),\cdots,U_m^*(t)$全是非负的以及关系式(5.55)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_i}{\partial t}&=U'_{ii}(t;W_1(X),\cdots,W_i(X),0,\cdots,0;0)\\&=\lambda_i(t)\varphi_i[0,\cdots,0,u_i(t,W_1(X),\cdots,W_i(X),0,\cdots,0),0,\cdots,0]\\&\leqslant\lambda_i(t)\varphi_i[u_{11}(t,W_1(X),0,\cdots,0;0),\cdots,u_{ii}(t);W_1(X),\\&\quad\cdots,W_i(X),0,\cdots,0;0),\cdots,u_{mm}(t;W_1(X),\cdots,W_m(X);0)]\\&=\lambda_i(t)\varphi_i(V(X,t)).\end{aligned}$$

故

$$\lambda_i(t)\varphi_i(V(X,t))-\partial V_i/\partial t\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m$$
$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+.$$

从而条件(H_2)满足。再由于

$$\begin{aligned}\partial V_i/\partial t+L^*V_i(X,t)&=u'_{ii}(t,W_1(X),\cdots,W_i(X),0,\cdots,0;0)\\&\quad+\mu(t)\sum_{j=1}^{l}b_j(X)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\mu(t)\sum_{j,k=1}^{l}a_{jk}(X)\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j\partial x_k}\\&\leqslant\lambda_i(t)\varphi_i(V(X,t))+\mu(t)\sum_{n=1}^{i}\frac{\partial u_{ii}}{\partial u_{n0}}\mathscr{L}^*W_n(X)\\&\quad+\frac{\mu(t)}{2}\sum_{j,k=1}^{l}a_{jk}(X)\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_j},\cdots,\frac{\partial W_i}{\partial X_j}\right)\\&\quad\times\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{10}^2}&\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{10}\partial u_{20}}\cdots&\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{10}\partial u_{i0}}\\\vdots&&\\\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{i0}\partial u_{10}}&\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial_{i0}\partial u_{20}}\cdots&\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{i0}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial W_1}{\partial x_k}\\\vdots\\\frac{\partial W_i}{\partial x_k}\end{pmatrix}\end{aligned}\qquad(5.57)$$

根据常微辅助系统(5.43)的伴随系统(5.43)* 的结构，则

$$DU_i^*(t;p_i,0)=\lambda(t)\varphi^*(U_i^*(t;p_i,0))$$

即

$$u_{i1}'(t;u_{10},0)=\lambda_1(t)\varphi_1(u_{i1}(t;u_{10},0),0,\cdots,0)$$
$$u_{i2}'(t;u_{20},0)=\lambda_2(t)\varphi_2(0,u_{i2}(t;u_{20},0),0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{ii}'(t;0,u_{i0})=\lambda_i(t)\varphi_i(0,\cdots,0,u_{ii}(t,u_{i0},0),0,\cdots,0)$$
$$u_{ii+1}'(t;0,0)=\lambda_{i+1}(t)\varphi_{i+1}(0,\cdots,0,u_{ii+1}(t,0),0,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{im}'(t,0,0)=\lambda_m(t)\varphi_m(0,0\cdots,0,u_{im}(t,0,0)).$$

由条件(C_2)及φ满足(a_1)，(a_2)，(a_3)，则如同定理5.49中证明(5.48)与(5.50)相应的作法，可表明

$$\frac{\partial u_{ii}}{\partial u_{i0}}\geqslant 0 \text{ 且 } \frac{\partial u_{ij}}{\partial u_{j0}}=0,\ j=1,2,\cdots,i-1. \tag{5.58}$$

$$\frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{i0}^2}\leqslant 0 \text{ 且 } \frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial u_{j0}\partial u_{k0}}=0,\ j=1,2,\cdots,i-1,k=1,2,\cdots,i. \tag{5.59}$$

同时

$$\sum_{i,k=1}^{l}a_{jk}(X)\frac{\partial W}{\partial x_j}\frac{\partial W}{\partial x_k}=|W_X\sigma(X)|^2. \tag{5.60}$$

于是根据(5.57)，(5.58)，(5.59)以及由引理5.48，有

$$\mathscr{L}^*W_j(X)=\widetilde{A}_{U(\rho)}W_j(X)=-h_j(X)\leqslant 0,$$
$$\partial V_i/\partial t+L^*V_i(X,t)\leqslant\lambda_i(t)\varphi_i(V(X,t)),$$
$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+,\ i=1,\cdots,m.$$

从而条件(H_3)满足。

为了证明条件(H_4)成立，我们只要注意到$M^*_{(t-t)}$为随机辅助系统(5.42)解过程的不变流形，並由$V(X,t)$的定义(5.56)与h的选择以及常微辅助系统(5.43)*有恒为零的解

的事实，推得如果 $X\in M^*_{(l-h)}$，就有

$$V_i(X,t)\equiv 0,\quad i=1,2,\cdots,h.$$

因由引理 5.48 知，$W_j(X)\in C^*, j=1,2,\cdots,m$，故有

$$V_i(0,t)=u_{ii}(t,W_1(0),\cdots,W_i(0),0,\cdots,0;0)\equiv 0,$$

$$i=1,2,\cdots,m.$$

最后，因为解 $U_i^*(t)$ 是非负的，$i=1,2,\cdots,m$，再由条件 (C_4) 我们有

$$\sum_{i=1}^m V_i(X,t)\geqslant u_{mm}[t;W_1(X),\cdots,W_m(X);0]$$

$$\geqslant r(\sum_{r=1}^m W_i(X))=b(X)$$

$$(X,t)\in U(\rho)\times E_1^+,$$

因 $r\in\mathscr{K}$，显然

$$b(0)=r\sum_{i=1}^m W(0)=r(0)=0.$$

对于 $X\neq 0$，显然也有 $b(X)>0$。再由 W_i 及 r 的连续性即 $b\in C[U(\rho),E_1^+]$，故 $b(X)\in\mathscr{PK}$，于是条件 (H_6) 成立。 ▌

〔注〕当 $m=1, h=0$ 时，该定理即为定理 5.49.

利用类似于推论 5.50 的证明方法，由定理 5.52 不难得下面的推论 6.53。

推论 5.53 如果时齐随机系统(5.42)的平凡解关于其解过程的不变流形 $M^*_{(l-h)}$ 满足定理 5.52 中的条件 (C_1)，则一定存在一个具有下面性质的向量函数

$$V(X)=(V_1(X),\cdots,V_m(X))^T.$$

(H_1^*). $V\in C[U(\rho),E_m^+]$, V_t, V_X, V_{XX}, 对于 $X\in U(\rho)$ 存在且连续.

(H_2^*). $\lambda(t)\varphi(V(X))\geqslant 0, X\in U(\rho)$.

(H_3^*). $\mathscr{L}^*V(X)\leqslant 0, X\in U(\rho)$.

(H_4^*). $V_i(X)\equiv 0, i=1,2,\cdots,h, X\in M^*_{(l-h)}$.

(H_5^*). $V(0)\equiv 0$，并且

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(X)\geqslant b(X), X\in U(\rho),$$

这里 $b\in\mathscr{PK}$.

实际上，由类似于推论5.50的证明方法，即知

$$V(X)=(V_1(X),\cdots,V_m(X))^T=(W_1(X),\cdots,W_m(X))^T.$$

[注] 当 $m=1, h=0$ 时，推论6.53即为推论5.50.

参 考 文 献

1 胡宣达 俞中明， 比较定理与随机微分方程（Ⅰ），南京大学学报（自然科学版），3.(1980).1—13.

2 胡宣达 俞中明， 比较定理与随机微分方程（Ⅱ）．南京大学学报（自然科学版），数学专刊，(1980) 78—85

3 胡宣达 俞中明， 比较定理与随机微分方程（Ⅲ）．南京大学学报（自然科学版），数学专刊，(1980)，85—92.

4 胡宣达 俞中明， 比较定理与随机稳定性，数学学报，25:4 (1982).4 427—440.

5 胡宣达 俞中明， 比较定理与随机有界性．数学学报，25:5 (1982).542—551.

6 胡宣达， 关于随机 Lyapunov 函数的存在性，数学学报，26 26:2 (1983).139—153.

7 胡宣达， 关于随机微分方程的指数稳定性．南京大学学报（自然科学版），1.(1984).1—7.

8 胡宣达， 关于随机微分方程的不稳定性定理（待发表）

9 Ladde,G.S. Systems of differential inequalites and stochastic differential equations (II). J.Math.Phys. 16:4 (1975) 894-900.

10 Ladde,G.S. and Lakshmikantham,V. Stochastic differential inequalities of Itô type. Proc.Conf.Appl. Stochastic Processes, Athens, Georgia, May. 14-19 (1978) Academic Press, New York.

11 Ladde,G.S. and Lakshmikantham,V. Systems of differential inequalities and stochastic differential equations V.（待发表、也见第四章文献［2］）.

12 Friedman,A. Stochastic differential equations and applications, Academic Press Inc. New York, I(1975) 98-113; (II)(1976) 270-278.

13 Lakshmikantham,V. and Leela,S. （见第四章文献［1］）.

14 Dynkin, E.B. Markov processes Vol.I. Springer-Verlag Berlin (1965).

15 Morozan, T. Boundedness proporties for stochastic systems. Lecture Notes in Math. 294, 21-34.

16 Kushner, H. Converse theorems for stochastic Lyapunov functions. SIAM. J. Control. 5:2 (1967) 228-233.

17 彼得罗夫斯基 N. Γ. 常微分方程论讲义（黄克欧译）高等教育出版社，(1957)，70—75.

18 秦元勋 等，（见第二章文献［9］）.

19 张炳根 沈毓毅，Ito′随机微分方程部分变元稳定性，山东海洋学院学报，11:2，(1981)，1—7.

第 三 篇

其　　　他

6

随机微分方程稳定性理论中的一些问题

§6.1 由首次近似决定的稳定性与不稳定性

对于给定的随机系统，只要能找到一个函数V，使它满足相应定理的条件，那么关于零解的稳定性或条件稳定性问题便可得到解决。但这些定理本身并没有给出寻找或构造所需函数V的方法，而主要是依赖于人们的经验和技巧。

尽管如此，在某些情况下，关于寻找函数V的问题可大大简化，例如，对给定的非线性随机系统，如果能忽略关于X的高阶项，将它化为线性随机系统，然后构造此线性近似系统所需要的函数V，籍此函数V来解决原来的完全系统的稳定性问题。由此亦可看出线性随机系统的重要性了。

一、按首次近似决定的稳定性

关于线性近似随机系统稳定性的第一个定理是由Kac和Krasovskii[1]证明的，所用的方法是他们研究随机受扰系统的方法。他们证明了，如果相应的线性近似系统是均方指数稳定的，则此完全系统是随机稳定的。对于Itô型方程的一

个类似的结果是Gihman[2]建立的。然而他们还没有回答这样的问题：线性化方法是否可应用于较广范围系统的稳定性理论；有这样的线性系统，它是几乎必然渐近稳定的，但它不按均方稳定（见第3章）。从而就导致这样的问题，如果对应的线性近似系统有常系数，并且是几乎必然渐近稳定的，试问：这完全系统是否一定稳定？回答是肯定的。

我们首先考虑线性系统

$$dX(t)=B(t)X(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t)X(t)dW_r(t) \tag{6.1}$$

具有常系数情形，即这里

$B(t)\equiv B\quad \sigma_r(t)\equiv\sigma_r,\ r=1,2,\cdots,k$，均为定常矩阵。

定理6.1 如果常系数线性系统(6.1)是几乎必然（或随机）渐近稳定的，并且系统：

$$dX(t)=b(X(t),t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t),t)dW_r(t) \tag{6.2}$$

的系数在点$X=0$的充分小的邻域内满足不等式：

$$|b(X,t)-BX|+\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(X,t)-\sigma_rX|<r|X|, \tag{6.3}$$

这里r为充分小的正数。则随机系统(6.2)的平凡解是随机渐近稳定的。

【证明】 由定理3.11，只要证明：如果系统(6.1)，对于某个$p>0$是指数p稳定的，并且条件(6.3)满足，则系统(6.2)是随机渐近稳定的即可。我们让

$$L_0=\frac{\partial}{\partial t}+\left(BX,\ \frac{\partial}{\partial X}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_rX,\ \frac{\partial}{\partial X}\right)^2,$$

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\left(b(X,t),\ \frac{\partial}{\partial X}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(X,t),\frac{\partial}{\partial X}\right)^2. \tag{6.4}$$

分别记为系统(6.1)和(6.2)的微分生成算子。

由定理3.4，存在一个函数$V(X,t)$使得对于某些$k_i>0$，有

$$
\begin{aligned}
&k_1|X|^p \leqslant V(X,t) \leqslant k_2|X|^p,\\
&L_0V(X,t) \leqslant -k_3|X|^p,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

$$
\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \leqslant k_4|X|^{p-1}, \qquad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant k_4|X|^{p-2},
$$

$$
i,j=1,2,\cdots,l.
$$

由(6.3)，(6.4)和(6.5)，在$X=0$的一个充分小的邻域内，有

$$
\begin{aligned}
LV &= L_0V + \left(b(X,t)-BX, \frac{\partial}{\partial X}\right)V + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(X,t)\right.\\
&\quad \left.-\sigma_r X, \frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\sigma_r(X,t)+\sigma_r X, \frac{\partial}{\partial X}\right)V\\
&\leqslant -k_3|X|^p + rk_4|X|^p + rk_5|X|^p.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

在此不等式中的常数k_5仅依赖于k_4和(6.1)中系数绝对值的上确界。

由(6.6)推得，函数LV在$X=0$的充分小的邻域内是负定的，只要$r<\frac{k_3}{(k_4+k_5)}$。此外，根据(6.5)，V是正定的並有一个无穷小上界。应用定理2.25的推论2.26于函数V，我们即得此定理的结论。 ∎

如果系统(6.1)的系数是时变的，则有类似的定理。

定理6.2 假设系统(6.1)的系数是时间的有界函数，(6.1)的平凡解是大范围关于t一致随机稳定的，並且对于一个充分小的正常数r的条件(6.3)满足，则(6.2)的平凡解是

随机渐近稳定的。

由定理3.16，只要证明：如果系统(6.1)是指数 p 稳定的，并且条件(6.3)满足，则定理的结论是正确的即可。然而此证明就是我们在定理 6.1 的证明中所作的。

［注］(1) 由定理6.1和6.2的证明，显然条件(6.3)中的常数 r 仅依赖于 k_3，k_4和$\sup\limits_{t\geq 0}\|\sigma_r(t)\|$。

(2) 由定理6.1和6.2推得，系统(6.2)是随机渐近稳定的，如果线性系统：

$$dX(t)=\frac{\partial b(0,\ t)}{\partial X}X(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r(0,\ t)}{\partial X}X(t)dW_r(t)$$

是大范围关于t一致随机稳定的，导数$\partial b/\partial X$和$\partial\sigma_r/\partial X$是有界的，并且在$X=0$处，对于$X$关于$t$一致连续。

二、按首次近似决定的不稳定性

我们首先回顾一下熟知的关于确定性情形的结果（见 Lyapunov[6]，Malkin[7]），仅限于定常系统。

Ляпунов定理：假设系统

$$dX/dt=BX \tag{6.7}$$

的特征方程至少有一个根有正实部，并让向量$\varphi(X)$满足$|\varphi(X)|<A|X|^2$，则方程

$$dX/dt=BX+\varphi(X) \tag{6.8}$$

的解 $X\equiv 0$ 是不稳定的。

Malkin在[7]中注意到了Ляпунов的证明，事实上是得到了更一般的结果。

Малкин 定理：如果方程 (6.7) 的特征方程至少有一个根有正实部，并且$|\varphi(X)|<r|X|$，这里r是一个充分小的正

常数，其仅依赖于一个满足Ляпунов第二不稳定性定理假设的正定二次型。则系统(6.8)的平凡解是不稳定的。

显然，对于随机系统情况要复杂得多，特别在下一段中给出的例子将表明Малкин定理的类比，在随机系统情形是不成立的。

首先，我们将证明，对于类似于定理6.1和定理6.2的不稳定性定理是正确的，只要该线性近似系统在充分强的意义下是不稳定的。由定理3.6知，如果系统(6.1)是指数q不稳定的，则对于某些常数$k_i>0$，存在一个函数$V(X,t)$使得

$$k_1|X|^{-q}\leqslant V(X,t)\leqslant k_2|X|^{-q},\quad L_0V\leqslant -k_3|X|^{-q},$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leqslant k_4|X|^{-q-1},\qquad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqslant k_4|X|^{-q-2},$$

$$i=1,2,\cdots,l. \tag{6.9}$$

定理6.3 假设线性系统(6.1)的系数是时间的有界函数，并且此系统的平凡解对于某个$q>0$是指数q不稳定的；此外，假设具有一个充分小正常数r（其仅依赖于$\sup\limits_{t>0}\|\sigma_r(t)\|$和(6.9)中出现的常数$k_1,\cdots,k_4$）的不等式(6.3)成立。则系统(6.2)的解$X(t)=0$是随机不稳定的。

【证明】 由定理3.6推得，在上面的假设下，对于系统(6.1)存在一个满足不等式(6.9)的函数$V(X,t)$。因此，如同(6.6)，我们得到在$X=0$的充分小的邻域内有

$$LV\leqslant -k_3|X|^{-q}+rk_4|X|^{-q}+rk_5|X|^{-q},$$

这里$k_5=k_5(k_4,\sup\limits_{t>0}\|\sigma_r(t)\|)$。

现在推得，对于充分小的r，函数V满足定理2.28的所有假设（见该定理下面的注），从而定理得证。 ∎

由此定理和定理3.12以及定理3.17，我们可得到下面的结果。

定理6.4 如果对任意$X\neq 0, \Delta>0$，线性系统(6.1)的解满足恒等式：

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{s>0} P\{\inf_{u>s+T}|X^{sX}(u)|<\Delta\}=0. \qquad (6.10)$$

并且矩阵$B, \sigma_1, \cdots, \sigma_k$的元素均是有界的，则对于满足具有充分小正数$r$的条件(6.3)的(6.2)型的所有系统的解$X(t)=0$是随机不稳定的。

定理6.5 假设系统(6.1)具有定常系数，则定理6.4的结论仍然成立，如果假设(6.10)是以下面的条件来替代：对于所有$X\neq 0$，有

$$P\{|X^{sX}(t)|\to\infty, \text{当}t\to\infty\text{时}\}=1. \qquad (6.11)$$

将Ляпунов和Малкин定理与定理6.5比较，表明对于确定性系统，定理6.5提供的是一个很可邻的结果。根据Ляпунов-Малкин定理，只要线性系统的特征方程至少有一个根有正实部，然而定理6.5对于确定性系统，仅当特征方程所有根的实部均为正时才是正确的。尽管如此，如果具有定常系数的系统(6.1)在下面的意义下是非退化的，对于所有的非零向量X和λ有

$$\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r X, \lambda)^2>0 . \qquad (6.12)$$

则定理6.5意味着有如下的推论。

推论6.6 如果不等式(6.12)满足，则定理6.5的结论成立，如果至少对于一个X值，条件(6.11)满足。

如果我们注意到，由定理3.19和定理3.20，条件(6.11)对于一个X成立，当且仅当对于所有$X\neq 0$成立，则此推论

是显然的。

联系到上面的定理和它的推论，我们自然要提出如下两个问题：

1° 我们能否以较弱的假设：

$$\sup_{t>s}|X^{sx}(t)|=\infty, \quad a.s$$

来替代定理6.5中的假设(6.11)？

2° 在对于至少有一个 $X\neq 0$，(6.11)成立且在没有退化条件(6.12)的假设下，能否证明定理 6.5 的结论？

在下段中，我们将看到对于这两个问题的回答，一般是否定的。

三、两个例子

例6.1 考虑一维系统

$$dx(t)=b(x(t),t)dt+\sigma(x(t),t)dw(t), \tag{6.13}$$

使得它的线性近似系统

$$dx(t)=b_0x(t)dt+\sigma_0x(t)dw(t) \tag{6.14}$$

有定常系数。

如果$b_0<\sigma_0{}^2/2$，我们可利用定理6.1；如果$b_0>\sigma_0{}^2/2$，我们可利用定理6.5；如果$b_0=\sigma_0^2/2$，则此线性系统是不稳定的，但对任意 $q>0$，不是渐近 q 不稳定的。此外，我们有

$$P\{\sup_{t>s}|x^{sx}(t)|=\infty\}=1, \tag{6.15}$$

对于$x\neq 0$。由第 3 章§3.1的结果推得，如果 $b_0=\sigma_0^2/2$，则对于任意$r>0$，系统

$$dx(t)=(b_0-r)x(t)dt+\sigma_0x(t)dw(t)$$

是渐近稳定的。

这意味着前面提出的一个问题的回答是否定的。因此

Малкин定理的类比对随机系统情形是不成立的。然而，如果我们假设差$b(x,t)-b_0x$和$\sigma(x,t)-\sigma_0x$，当$x\to 0$时，十分迅速地趋于0，系统(6.13)的解$x(t)\equiv 0$，仍然是不稳定的。

事实上，假设$b_0=\sigma_0^2/2$，并且对于某个$k>0$，$\alpha>0$，有

$$|b(x,t)-b_0x|+|\sigma(x,t)-\sigma_0x|<k|x|^{1+\alpha} \qquad (6.16)$$

考虑辅助函数$V(x)=\ln\ln(1/|x|)$。读者容易验证在此情形下，当$x\to 0$时，$V\to\infty$，並且对于固定的充分小的$\delta>0$和任意的$\varepsilon<\delta$，有

$$\inf_{\varepsilon<|x|<\delta} LV<0.$$

在$b_0=\sigma^2/2$和(6.16)的假设下，由定理2.28推得系统(6.13)是随机不稳定的。

因此，我们已经表明在一维情形，如果具有常系数的线性系统满足(6.11)，並且这完全系统是在(6.16)的意义下近似线性的，则此完全系统是随机不稳定的。

考察此结论在多维情形是否仍然正确是有意义的。

例6.2 让$\psi(Z)$记为实变数Z的可微函数，具有紧支柱並且连同它的一阶导数都是有界的，进而假设

$$\psi(0)=0; \qquad \psi'(0)=-3; \qquad |\psi(Z)|<1. \qquad (6.17)$$

利用此函数，我们构造一个平面上的Markov过程，其是下列Itô方程系统的解：

$$dx_1(t)=\left[x_1+\varepsilon x_2\psi\left(\frac{x_1}{\varepsilon x_2^2}\right)\right]dt+\sigma x_1dw_1(t),$$
$$(6.18)$$
$$dx_2(t)=-x_2dt+\delta x_1dw_2(t).$$

我们首先注意，对于任意的$\varepsilon>0$，$\delta>0$，(6.18)的系数关于x_1，x_2有有界的导数，並且它们满足存在定理的条件（定理2.2）。进而，对于小的ε和δ，(6.18)的系数在(6.3)

的意义下，趋近于下列确定性系统的系数：

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1,\qquad \frac{dx_2}{dt}=-x_2, \tag{6.19}$$

这里(6.3)中的常数r可假设等于$\min(\varepsilon,\delta)$。

最后，系统(6.19)的解，除了对于$x_1(0)=0$的解外，显然当$t\to\infty$时，其绝对值发散到无穷。尽管如此，我们可以证明，对于任意$\varepsilon>0$和$\delta>0$，(6.18)的解$X(t)\equiv0$是大范围渐近稳定的。这就给前面提出的第二个问题，提供了一个否定的回答。

为了证明(6.18)的平凡解是大范围渐近稳定的，我们利用这样的事实：(6.18)的所有系数均为一次齐次函数，所以过程$X(t)$在圆周$|X|=1$的投影也是一个Markov过程（见第3章§3.6）。

如同第3章§3.6，我们引进新变数：

$$r(t)=\frac{1}{2}\ln(x_1^2(t)+x_2^2(t))=\ln|X(t)|,$$

$$\varphi(t)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x_2(t)}{x_1(t)}.$$

并利用Itô公式，我们得到：

$$d\varphi(t)=-\left[2\sin\varphi\cos\varphi+\varepsilon\sin^2\varphi\,\psi\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\varepsilon}\right)\right]dt$$

$$+\delta(\cos^2\varphi dW_2(t)-\sin\varphi\cos\varphi\, dW_1(t)). \tag{6.20}$$

$$dr(t)=\left[\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi\,\psi\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\varepsilon}\right)\right]dt$$

$$+\delta(\cos^2\varphi\, dW_1(t)+\sin\varphi\cos\varphi\, dW_2(t)) \quad (6.21)$$

在圆周 $0\leqslant\varphi<2\pi$ 上，Markov 过程 $\varphi(t)$ 的扩散系数 仅在点 $\varphi_1=\pi/2, \varphi_2=3\pi/2$ 消失。鉴于(6.17)，这意味着 $\varphi=\pi/2$ 与 $\varphi=3\pi/2$ 是方程(6.20)的解。我们断言这些解是稳定的。为证此，我们研究在点 $\varphi=\pi/2$ 的邻域内的一阶近似方程，由(6.17)此方程是

$$d\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)dt+\delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)dW_1(t)$$

因为一阶近似方程是渐近稳定的。故由定理6.1推得方程(6.20) 的 解 $\varphi=\pi/2$ 是随机渐近稳定的。类似地证明：解 $\varphi=3\pi/2$ 的稳定性，对于 $\varphi\neq\varphi_i(i=1,2)$，过程 $\varphi(t)$ 的扩散系数是正的。因此，如同定理 2.29 证明中的理由，易见，当 $t\to\infty$ 时，对任意初始条件，$\varphi(t)$ 有一个极限，此极限或者是 $\pi/2$，或者是 $3\pi/2$。

于是由方程(6.21)和引理3.18，我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln|X(t)|}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left[\cos^2\varphi(s)-\sin^2\varphi(s)\right.$$

$$\left.+\varepsilon\sin\varphi(s)\cos\varphi(s)\times\psi\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi(s)}{\varepsilon}\right)\right]ds=-1.$$

从而 $P\{|X(t)|\to 0$，当 $t\to\infty$ 时$\}=1$，並且(6.18)的解是大范围渐近稳定的，这就是我们所要证明的。

在结束这一节的时候，我们注意到例中条件(6.16)，对任意 $\alpha>0$ 均不成立。(6.11)仅对一个 X 值成立，並且完全系统在(6.16)的意义下逼近线性系统的假设下，我们是非常有可能去证明关于首次近似的不稳定性定理的。此定理应当是 Ляпунов 定理的自然推广。

§6.2 简化原理

根据前节的讨论，我们可以类似于确定性情形，将非线性系统的稳定性问题分为**非临界情形**（即可以按首次近似系统决定的）及**临界情形**（即不能按首次近似系统决定的）两类。

临界情形下的稳定性问题是 А.М.Ляпунов 第二方法理论中的一个重要问题。同时也是比较困难和复杂的问题。对于确定性情形，А.М.Ляпунов在其原著《运动稳定性的一般问题》[6]中比较完整地解决了下面两种情况下的稳定性问题：

第一临界情况：特征方程有一个单零根，而其余根之实部都是负的。

第二临界情况：特征方程有一对纯虚根，而其余根之实部都是负的。

在Ляпунов以后还有Каменков，Малкин以及Зубов等人继续研究了其他类型临界情况下的稳定性问题，而且近二十多年来这方面的研究也一直有所发展。在这方面的研究中有一种称之为**简化原理**的方法，它是研究临界情况稳定性问题的基础。

简化原理是将对一个 $(l+m)$ 维系统的 $X(t)$，$Y(t)$ 的研究化简为如下两个系统稳定性的研究：一个是向量 $X(t)$ 的首次近似的 l 维系统（此近似系统的系数均假设与 Y 无关）；另一个是通过对于 Y 的方程中，置 $X=0$ 而得到的 m 维系统（见Malkin[7]，$p383$和$p529$的注）。

本节将简化原理应用于当两个分支系统凭藉线性近似系

统均为大范围一致稳定的较简单情形，虽然本节得到的结果不能直接应用于临界情况的研究，但也提供了某种实际重要情形的简化稳定性研究的可能性，对于随机情形中的临界情况下稳定性问题的研究工作还很少，还有待于今后的发展。

让$(X(t),Y(t))$为给定的，由随机微分方程系统：

$$dX(t)=b(X(t),Y(t),t)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X(t),Y(t),t)dW_r(t),$$

$$dY(t)=\tilde{b}(X(t),Y(t),t)dt+\sum_{r=1}^{k}\tilde{\sigma}_r(X(t),Y(t),t)dW_r(t),$$

(6.22)

所描述的一个$(l+m)$维Markov过程。

这里向量X,b,σ_r均为l维的，並且$Y,\tilde{b},\tilde{\sigma}_r$均为$m$维的。

如同通常那样，我们假设系数$b,\sigma_r,\tilde{b},\tilde{\sigma}_r$满足Lipschitz条件和线性增长条件以及$b(0,0,t)=\tilde{b}(0,0,t)\equiv 0,\sigma_r(0,0,t)=\tilde{\sigma}_r(0,0,t)\equiv 0$。因此，系统(6.22)有平凡解$X(t)\equiv 0$，$Y(t)\equiv 0$。

此外，我们还假设系统(6.22)的系数关于X,Y的导数，对于t均为一致连续的，并且

$$\frac{\partial b(0,0,t)}{\partial Y}\equiv 0, \qquad \frac{\partial \sigma_r(0,0,t)}{\partial Y}\equiv 0$$

因此，在下列首次近似方程的系统中，$X(t)$的分量也是Markov过程：

$$dX(t)=\frac{\partial b(0,0,t)}{\partial X}X(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\sigma_r(0,0,t)}{\partial X}X(t)dW_r(t),\tag{6.23}$$

$$dY(t)=\left[\frac{\partial\tilde{b}(0,0,t)}{\partial X}X(t)+\frac{\partial\tilde{b}(0,0,t)}{\partial Y}Y(t)\right]dt$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\left[\frac{\partial\tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X}X(t)+\frac{\partial\tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y(t)\right]dW_r(t).\tag{6.24}$$

定理6.2(和嗣后的注2)意味着，如果方程系统(6.23)，(6.24)的平凡解是大范围随机一致稳定的，则系统(6.22)是随机渐近稳定的。本节所建立的定理，可使我们得到更多的结果。

对于一维过程$x(t)$，此定理是Pinsky[8]证明的，他用的是另一种方法。

定理6.7 假设上面关于系统(6.22)系数的假设均满足，进而假设对于系统(6.23)和系统

$$dY(t)=\frac{\partial\tilde{b}(0,0,t)}{\partial Y}Y(t)dt+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial\tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y(t)dW_r(t)\tag{6.25}$$

的平凡解是大范围随机一致稳定的，则系统(6.22)的平凡解是随机渐近稳定的。

【证明】 定理的假设与定理3.16以及定理3.4意味着对于一个充分小的$p>0$，存在两个p次齐次函数$V_1(X,t)$，$V_2(X,t)$使得

$$\left.\begin{aligned}&k_1|X|^p\leqslant V_1(X,t)\leqslant k_2|X|^p,\\&\left|\frac{\partial V_1(X,t)}{\partial x_i}\right|\leqslant k_3|X|^{p-1},\\&\left|\frac{\partial^2 V_1(X,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqslant k_3|X|^{p-2},\\&\qquad\qquad i,j=1,2,\cdots,l.\\&L_1V_1(X,t)\leqslant-|X|^p\end{aligned}\right\}\tag{6.26}$$

$$\left.\begin{aligned}&k_1|Y|^p\leqslant V_2(Y,t)\leqslant k_2|Y|^p,\\&\left|\frac{\partial V_2(Y,t)}{\partial y_i}\right|\leqslant k_3|Y|^{p-1},\\&\left|\frac{\partial^2 V_2(Y,t)}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant k_3|Y|^{p-2},\\&\qquad\qquad i,j=1,2,\cdots,m.\\&L_2V_2(Y,t)\leqslant-|Y|^p\end{aligned}\right\}\tag{6.27}$$

这里

$$L_1=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{\partial b(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial\sigma_r(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial}{\partial X}\right)^2;$$

$$L_2=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{\partial\widetilde{b}(0,0,t)}{\partial Y}Y,\frac{\partial}{\partial Y}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y,\frac{\partial}{\partial Y}\right)^2$$

分别为系统(6.23)和(6.25)的微分生成的算子。

系统(6.23)，(6.24)的微分生成算子是

$$
\begin{aligned}
L = & \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial b(0,0,t)}{\partial X} X, \frac{\partial}{\partial X}\right) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial \sigma_r(0,0,t)}{\partial X} X, \frac{\partial}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{b}(0,0,t)}{\partial X} X\right. \\
& \left. + \frac{\partial \tilde{b}(0,0,t)}{\partial Y} Y, \frac{\partial}{\partial Y}\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X} X\right. \\
& \left. + \frac{\partial \tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y} Y, \frac{\partial}{\partial Y}\right)^2 \\
& + \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial \sigma_r(0,0,t)}{\partial X} X, \frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X} X\right. \\
& \left. + \frac{\partial \tilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y} Y, \frac{\partial}{\partial Y}\right).
\end{aligned}
$$

现在我们考虑辅助函数

$$
W(X,Y,t) = [V_1^{2/p}(X,t) + \varepsilon V_2^{2/p}(Y,t)]^{p/2} + A V_1(X,t), \tag{6.28}
$$

这里V_1, V_2是满足条件(6.26)(6.27)的函数，并且常数$\varepsilon>0$，$A>0$的值将在下面给定。显然(6.26)，(6.27)意味着

$$
k_4(|X|^p + |Y|^p) \leqslant W(X,Y,t) \leqslant k_5(|X|^p + |Y|^p) \tag{6.29}
$$

对于某个$k_4>0, k_5>0$和任意的$\varepsilon>0, A>0$成立。

此外，显然$X=0$为过程$X(t), Y(t)$的一个不可达 的 不变集，因此在$X(0)\neq 0$的情形，我们可利用Itô公式，并且也可利用定理2.3于任意在超平面$X=0$上是不可微的函数W。考虑到这一点以及(6.29)，我 们 看到它将足以 证 明 在 集

$X=0$ 的外面，由(6.28) 定义的函数 $W(X,Y,t)$ 对于某个 ε 和 Δ 满足

$$LW(X,Y,t)\leqslant -k_6(|X|^p+|Y|^p),\quad k_6>0. \tag{6.30}$$

确实，由上面所作的说明，(6.29)，(6.30)以及定理2.36意味着系统(6.23)，(6.24) 是指数 p 稳定的，因此定理的结论，现在由定理6.2即得。

让 $W_i=V_i^{2/p}$，则显然

$$L_1V_1(X,t)=\frac{p}{2}W_1^{\frac{p}{2}-1}L_1W_1$$

$$+\frac{1}{8}p(p-2)W_1^{\frac{p}{2}-2}$$

$$\times\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial\sigma_r(0,0,t)}{\partial X}X,\ \frac{\partial W_1}{\partial X}\right)^2,$$

由此並由(6.26)易得

$$W_1L_1W_1+\frac{P-2}{4}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial\sigma_r(0,0,t)}{\partial X}X,\ \frac{\partial W_1}{\partial X}\right)^2$$

$$\leqslant -k_7|X|^4,$$

对于某个常数 $k_7>0$，类似地可得

$$W_2L_2W_2+\frac{P-2}{4}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y,\frac{\partial W_2}{\partial Y}\right)^2$$

$$\leqslant -k_8|Y|^4,\quad k_8>0\ .$$

这些不等式连同(6.26)，(6.27)意味着对于某些不依赖于 ε 的常数 $k_9,k_{10}>0$，有

$$L[(W_1+\varepsilon W_2)]^{p/2}=\frac{p}{2}(W_1+\varepsilon W_2)^{p/2-2}$$

$$\times\{(W_1+\varepsilon W_2)L_1W_1$$

$$+\frac{p-2}{4}\sum_{r=1}^{k}(\frac{\partial\sigma_r(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial W_1}{\partial X})^2$$

$$+\varepsilon(W_1+\varepsilon W_2)L_2W_2$$

$$+\frac{p-2}{4}\varepsilon^2\sum_{r=1}^{k}(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X}X$$

$$+\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y,\frac{\partial W_2}{\partial Y})^2$$

$$+\varepsilon(W_1+\varepsilon W_2)(\frac{\partial\widetilde{b}(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial W_2}{\partial Y})$$

$$+\varepsilon(W_1+\varepsilon W_2)\sum_{r=1}^{k}(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial}{\partial Y})^2W_2$$

$$+\varepsilon(W_1+\varepsilon W_2)\sum_{r=1}^{k}(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial}{\partial Y})$$

$$\times(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y,\frac{\partial}{\partial Y})W_2$$

$$+\frac{\varepsilon(p-2)}{4}(\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial X}X+\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(0,0,t)}{\partial Y}Y,$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial Y})\times(\frac{\partial\sigma_r(0,0,t)}{\partial X}X,\frac{\partial W_1}{\partial X})\}$$

$$\leqslant k_9(W_1+\varepsilon W_2)^{p/2-2}$$

$$\times[-k_{10}(|X|^4+\varepsilon^2|Y|^4)+\varepsilon|X|^2\cdot|Y|^2$$

$$+\varepsilon|Y||X|^3+\varepsilon^2|Y|^3|X|]. \qquad (6.31)$$

此外，由(6.26)有$L_1V_1 \leqslant -|X|^p$，由此並由显然的不等式：

$$|X|^p \geqslant \frac{|X|^p W_1^{2/p}}{(W_1+\varepsilon W_2)^{2/p}} \geqslant k_{11}(W_1+\varepsilon W_2)^{2/p-2}|X|^4,$$

我们得到

$$LV_1 \leqslant -k_{11}(W_1+\varepsilon W_2)^{2/p-2}|X|^4. \qquad (6.32)$$

不等式(6.31)和(6.32)得到估计：

$$LW \leqslant k_9(W_1+\varepsilon W_2)^{2/p-2} \times [-Ak_{12}|X|^4 - k_{10}\cdot\varepsilon^2|Y|^4$$
$$+\varepsilon|X|^2|Y|^2+\varepsilon|Y||X|^3+\varepsilon^3|Y|^3|X|],$$

其中的常数k_i不依赖于ε和A。

显然，如果ε充分小並且A充分大，则方括号之间的表示式是一个4阶的负定式(这通过置$Y\sqrt{\varepsilon}=Z$，很容易看出)，这意味着(6.30)式，从而也意味着定理的结论成立。

§6.3 稳定性与超过(excessive)函数

记$X=(X(t),P_X)$为Banach空间E中的一个时齐、右连续、强Markov过程。

这里P_X是由“初始条件”$X(0)=X$产生的测度。我们以$\|X\|$记为元素X的模，並以$\mathscr{B}$记为E中可测集的σ代数，以$P(t,X,A)$ $(A\in\mathscr{B})$记为过程X在状态空间$(E,\mathscr{B})$上的转移函数。

由Markov过程理论，我们知道，研究Markov过程性质的一个十分有效的工具就是**超过函数**（见Dynkin[11]）。本节的目的就是利用超过函数来研究过程的稳定性质。

一、超过函数与一般的稳定性条件

定义6.1 一个非负$\mathscr{B}$可测函数$V(X)$ $(X\in E)$是称为关于$P(t,X,A)$(或关于过程X)的**超过函数**，如果它满足：

$$\text{(i)}\quad T_tV(X)=\int_E p(t,X,dY)V(Y)\leqslant V(X),\qquad t\geqslant 0,\quad X\in E.$$

(ii) $T_tV(X)\longrightarrow V(X)$，当$t\downarrow 0$时。

因此可知(见Dynkin[11]，定理12.2)，一个超过函数$V(X)$必满足不等式

$$E_XV(X(\zeta))\leqslant V(X),\tag{6.33}$$

对于任一 Markov 时刻ζ和所有$X\in E$。

定义6.2 非负$\mathscr{B}$可测函数V是称为关于开集U中的过程X是超过的，如果不等式(6.33)对于所有的$\zeta\leqslant\tau_U$满足。这里τ_U记为过程X的轨道关于集U的首出时。

回顾一个非空集$D\in\mathscr{B}$，对于过程X是称为**不变的**，如果$p(t,X,D)=1$，对于$X\in D,t\geqslant 0$。

定义6.3 过程X的一个不变点$X_0\in E$是称为对于过程X是**随机稳定的**的，如果

$$\inf_{\|Y-X_0\|\to 0} P_Y\{\sup_{t>0}\|X(t)-X_0\|>\varepsilon\}=0.$$

定理6.8 (一般的随机稳定性定理) 不变点$X_0(\in E)$对于过程X是随机稳定的一个充分条件是存在一个函数V，其关于X_0的一个邻域中的过程X是超过的，並且满足

$$V(X_0)=0,$$

且

$$\inf_{\|X-x_0\|\geq\varepsilon} V(X)=V_\varepsilon>0, \quad 对于\varepsilon>0。$$

【证明】 此证明由(6.33)和Чебышев不等式推得。因为

$$V_\varepsilon P_X\{\sup_{t\geq0}\|X(t)-X_0\|>\varepsilon\}\leqslant E_X V(X(\tau_{U(X_0)}(t)))$$
$$\leqslant V(X)。$$

显然上面非常一般的稳定性条件是很有意义的。然而在某些特殊情形，我们可以导出较特殊的条件。例如，定理2.21的证明，本质上可化为去验证一个定义在原点某邻域U中，属于$C_2^0(U)$类且满足不等式$LV\leqslant0$的非负函数V关于集U中的过程X是超过的。

定理2.21推广到突跃过程已由Gihman[13]考虑过。

对于右连续强Markov过程，它的弱微分生成算子作用于一个非负函数的结果是非正的，则此非负函数是超过的，这一事实可借助于熟知的Дынкин定理(见Dynkin[11])来建立。由此並连同定理6.8，我们有可能去导出关于这种过程的一般稳定性条件。

下面我们来介绍当$E=E_l$时，Kushner[12]的结果。

二、$E=E_l$时的一般稳定性条件

为了下面叙述简洁起见，我们作如下假设：

(A_1)．$E=E_l$为l维Euclid空间。

(A_2)．$V(\cdot)$是定义在E_l上的非负实值连续函数。

(A_3)．令$Q_\lambda\triangleq\{X:V(X)<\lambda\}$，且设$Q_\lambda$非空。

以(X_t,P_X)表以$(E_l,\mathscr{B}_l)$为状态空间的右连续、齐次、强

Markov过程，其至少在首次离开Q_λ前有定义。

令

$$\tau_\lambda \triangleq \inf\{t: X_t \notin Q_\lambda\},$$

$\widetilde{X}_t = X_{t\wedge\tau_\lambda}$，$\widetilde{A}_\lambda$为$\widetilde{X}_t$的弱无穷小算子。

(A_4). $V(\cdot)\in\mathscr{D}(\widetilde{A}_\lambda)$（这里$V(\cdot)$的定义是假设限制于从$Q_\lambda$中的任一点$X$出发的过程$\widetilde{X}_t$的几乎必然值域的并集内）。

(A_5). $\forall\varepsilon>0$，$\sup\limits_{x\in Q_\lambda} P_X\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\|X_S - X\|>\varepsilon\}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$。

〔注〕 若$Y\notin Q_\lambda$，但Y在始态为某个$X_0=X\in Q_\lambda$的Markov过程X_s，$S\geqslant\tau_\lambda$的几乎必然值域内，则

$$\widetilde{A}_\lambda V(Y)\triangleq -k(Y)=0.$$

定理6.9 （原点稳定性类型） 假设(A_1)—(A_4)成立。若$\widetilde{A}_\lambda V(X)\leqslant 0$，则当$t\to\infty$时，$V(\widetilde{X}_t)$，$a.s$收敛，因而$V(X_t)$对几乎所有在$Q_\lambda$中的轨道收敛，对$X\in Q_\lambda$，有

$$P_X\{\sup_{0\leqslant t<\infty} V(X_t)\geqslant\lambda\} = P_X\{\sup_{0\leqslant t<\infty} V(\widetilde{X}_t)\geqslant\lambda\}$$

$$\leqslant\frac{V(X)}{\lambda}. \tag{6.34}$$

如果$V(0)=0$，$X\neq 0$时，$V(X)\neq 0$，则当$|X|\to 0$时，(6.34)中的概率趋于0。

【证明】 利用Дынкин公式见(Dynkin[11])有

$$E_X V(\widetilde{X}_t) - V(X) = E_X\int_0^t \widetilde{A}_\lambda V(\widetilde{X}_S)d_S$$

$$= E_X\int_0^{t\wedge\tau_\lambda} \widetilde{A}_\lambda V(X_S)d_S\leqslant 0, \tag{6.35}$$

于是 $a.s$ 有

$$E_{\widetilde{X}_s} V(\widetilde{X}_t) \leqslant V(\widetilde{X}_s).$$

因为对Markov过程$V(\widetilde{X}_t)$，有

$$E_{\widetilde{X}_s} V(\widetilde{X}_t) = E_X[V(\widetilde{X}_{t+s}) | \widetilde{X}_s] = E_X[V(\widetilde{X}_{t+s}) | \mathcal{N}_s]$$

故等价地有

$$E_X[V(\widetilde{X}_{t+s}) | \mathcal{N}_s] \leqslant V(\widetilde{X}_s), \quad a.s$$

因此，$\{V(\widetilde{X}_t), \mathcal{N}_t\}$是非负上鞅，这就给出了$V(\widetilde{X}_t)$的收敛性，从而$V(X_t)$对几乎所有在$Q_\lambda$中的轨道收敛。

因对$X_0 = X \in Q_\lambda$，有

$$\{\sup_{0 \leqslant t < \infty} V(X_t) \geqslant \lambda\} = \{\sup_{0 \leqslant t < \infty} V(\widetilde{X}_t) \geqslant \lambda\},$$

从而由上鞅不等式，即得由(6.34)。

由设易见，当$|X| \to 0$时，$V(X) \to 0$，从而(6.34)中的概率趋于0。 ▌

三、$E = E_l$ 时的一般渐近稳定性条件

定理6.10 （渐近稳定性） 假设(A_1)—(A_5)成立。若在Q_λ中有$\widetilde{L}_\lambda V(X) \triangleq -k(X) \leqslant 0$，则

$$k(\widetilde{X}_t) \xrightarrow{P} 0, \text{并且} V(\widetilde{X}_t), \ a.s.$$

收敛。于是，$k(X_t) \xrightarrow{P} 0$，并且$V(X_t)$对几乎所有在Q_λ中的轨道收敛，(不等式(6.34)给出了不离开Q_λ的概率下界为

$1-\frac{V(X)}{\lambda})$。

若$k(\cdot)$在Q_λ中一致连续，则对几乎所有不离开Q_λ的轨道，有

$$X_t \to [\bigcap_{\varepsilon>0}\{X:k(X)<\varepsilon\}]\cap Q_\lambda \triangleq P_\lambda.$$

如果上面的假设，对所有的$\lambda<\infty$成立，且当$|X|\to\infty$时，$V(X)\to\infty$，则

$$X_t \to \bigcap_{\varepsilon>0}\{X:k(X)<\varepsilon\}\triangleq K. \quad a.s.$$

上面二种收敛性，当$Q_\lambda\cap\{X:k(X)<\varepsilon\}$为无界时，是在关于紧化的$E_l$的拓扑下的。若此集有界，则可以$\{X:k(X)=0\}$来替代$\bigcap_{\varepsilon>0}\{k(X)<\varepsilon\}$.

【证明】 证明的关键在于利用"$\forall\varepsilon>0$，过程$\widetilde{X}_t$在集$K_\varepsilon\triangleq\{X:k(K)\geqslant\varepsilon\}\cap Q_\lambda$内，停留时间之总和是$a.s$有限的"这一事实。

以X表初始状态，$T'(t,\varepsilon)$表在时间间隔$[0,t]$内，使$k(\widetilde{X}_s)\geqslant\varepsilon$的总时间，则由Дынкин公式，有

$$V(X)\geqslant -E_XV(\widetilde{X}_t)+V(X)=E_X\int_0^t k(\widetilde{X}_s)ds$$
$$\geqslant\varepsilon E_XT'(t,\varepsilon). \tag{6.36}$$

让$t\to\infty$，上式两端取极限得

$$V(X)\geqslant\varepsilon T'(\infty,\varepsilon),$$

从而推得

$$k(\widetilde{X}_t)\xrightarrow{P}0.$$

下证剩下的结论。令$C_\varepsilon \triangleq \{X: k(X)<\varepsilon\}\cap Q_\lambda$。在$Q_\lambda$中必有$X\in Q_\lambda$，使得$k(X)>0$，因此存在$\varepsilon_0>0$，使当$0<\varepsilon<\varepsilon_0$时，$Q_\lambda\cap C_\varepsilon'$非空，再由$k(\cdot)$的一致连续性知，$Q_\lambda\cap C_\varepsilon'$与$C_{\varepsilon/2}$的距离为正，设此距离$\geqslant\delta(\varepsilon)>0$。

事实上，因$\forall\varepsilon>0$，由k的一致连续性，存在$\delta'(\varepsilon)>0$，使当$|X_1-X_2|<\delta'(\varepsilon)$时，有

$|k(X_1)-k(X_2)|<\varepsilon/2$，如二集的距离为0，则存在$X_1$，$X_2$分属此二集，使得$|X_1-X_2|<\delta'(\varepsilon)$，但$|k(X_1)-k(X_2)|>\varepsilon/2$，这与$k$的一致连续性矛盾。

定义二个Markov时间序列$\{\sigma_n\}$，$\{\sigma_n'\}$：

$$\sigma_0=0,$$

$$\sigma_0'=\inf\{t: \widetilde{X}_t\in C_{\varepsilon/2}\},$$

$$\sigma_1=\inf\{t: \widetilde{X}_t\in Q_\lambda\cap C_\varepsilon',\ t>\sigma_0'\},$$

$$\sigma_1'=\inf\{t: \widetilde{X}_t\in C_{\varepsilon/2},\ t>\sigma_1\},$$

……

$$\sigma_n=\inf\{t: \widetilde{X}_t\in Q_\lambda\cap C_\varepsilon',\ t>\sigma_{n-1}'\},$$

$$\sigma_n'=\inf\{t: \widetilde{X}_t\in C_{3/2},\quad t>\sigma_n\},$$

……

由(A_5)，存在$\rho>0$，使得

$$\sup_{x\in Q_\lambda} P_x\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\rho}|X_s-X|>\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\}\leqslant\frac{1}{2},\qquad (6.37)$$

令

$$A_n\triangleq\{\omega: \widetilde{X}_{\sigma_n+s}\in C_{\varepsilon/2}'\cap Q_\lambda,\ 0\leqslant s\leqslant\rho,\quad \sigma_n<\infty\}.$$

若ω属于无穷多个A_n，则相应的$\widetilde{X}_t(\omega)$的轨道进入$K_{\varepsilon/2}=C'_{\varepsilon/2}\cap Q_\lambda$的总时间为无限长，这与前面证明的事实矛盾！故$\omega$只能属于有限多个$A_n$。从而有$\sum_{n=0}^{\infty} X_{A_n}$，$a.s$ 收敛。

由于此处$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}\in \mathcal{N}_{\sigma_n}$，即$\chi_{A_{n-1}}$为$\mathcal{N}_{\sigma_n}$可测的，故由Levy定理，由$\sum_n \chi_{A_n}<\infty$，$a.s$ 可推得

$$\sum_n P_X\{A_n|\mathcal{N}_{\sigma_n}\}<\infty, \quad a.s$$

再由

$$P_X\{A_n|\mathcal{N}_{\sigma_n}\}=P_X\{A_n|\widetilde{X}_{\sigma_n}\}=P_{\widetilde{X}_{\sigma_n}}(A_n)$$

$$=\begin{cases}0 & \sigma_n=\infty\\ P_{\widetilde{X}_{\sigma_n}}\{\widetilde{X}_S\in C'_{\varepsilon/2}\cap Q_\lambda, 0\leqslant S\leqslant\rho\} & \sigma_n<\infty\end{cases}$$

$$\geqslant P_{\widetilde{X}_{\sigma_n}}\{\sup_{0\leqslant S\leqslant\rho}|\widetilde{X}_S-\widetilde{X}_{\sigma_n}|\leqslant\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\}\chi_{\{\sigma_n<\infty\}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\chi_{\{\sigma_n<\infty\}}.$$

（因为$\{\omega: \sup_{0\leqslant s\leqslant\rho}|\widetilde{X}_S-\widetilde{X}_{\sigma_n}|\leqslant\frac{\delta(\varepsilon)}{2}, \sigma_n<\infty\}\subset A_n$）

故得$\infty>\sum_n P_X\{A_n|\mathcal{N}_{\sigma_n}\}\geqslant\frac{1}{2}\sum_n \chi_{\{\sigma_n<\infty\}}$，从而$\sigma_n<\infty$以概率1只能出现有限多次，亦即几乎所有$\omega\in\Omega$，使$\sigma_n<\infty$，只能对有限多个$n$值成立。所以对几乎所有不离开$Q_\lambda$的轨道$\widetilde{X}_t=X_t$，由于已证过$\widetilde{X}_t$进入$K_\varepsilon$的总时间 $a.s.$有限，现又证明了$\widetilde{X}_t$只能有限多次进入K_ε，故有

$$X_t=\widetilde{X}_t\to\{X: k(X)<\varepsilon\}\cap Q_\lambda, \quad t\to\infty, \forall\varepsilon>0,$$

故

$$X_t\to[\bigcap_{\varepsilon>0}\{X:k(X)<\varepsilon\}]\cap Q_\lambda\triangleq P_\lambda.$$

如果对任何 $\lambda<\infty$，假设都成立，且 $|X|\to\infty$ 时，有 $V(X)\to\infty$，则 $|X_t|\nrightarrow\infty$，因否则有 $V(X_t)\to\infty$，故此有 λ，使 X_t 全在 Q_λ 中，由前面的结论知

$$X_t\to\bigcap_{\varepsilon>0}\{X:k(X)<\varepsilon\}=\{X:k(X)=0\},\qquad a.s. \blacksquare$$

§6.4 有界性与不变测度

不变测度的存在性，实质上是一种稳定性质。不变测度的存在性问题也是Markov过程理论中开始较早的研究课题，在较早的Markov链理论中，就曾证明了Markov链存在不变测度的充要条件是此链存在正常返状态，作为其特例，有限Markov链一定存在不变测度.类似的命题对一般的 Markov过程是否成立，许多作者在这方面作了许多工作，较早的就有 Harris[15]，Foguel[16] 等人，但他们是在所谓的"条件C"和"耗散性"下来讨论不变测度的存在的，而那些条件的验证几乎是无从下手的。60年代末和70年代初，Bene's[17]，[18] 与 Senliffes[19]，利用 Markov-Kokutani 不动点定理得到了较一般 Markov 过程存在不变测度的充要条件。钟瑚绵[20]，Beboutoff[21]把有限Markov链情形推广到了相应的紧距离状态空间，证明了任何紧距离空间上的 Feller 过程，一定存在不变概率测度。Itô 方程的解过程是一类较特殊的Feller过程，其状态空间为 E_l，Zakai[22]，[23]，Miyahara[24]分别对 Itô 过程得到了关于不变测度的一些更精致的结果，并且建立了解的有界性与不变测度的存在性之间的某些

联系。在以上这些工作的基础上，戴建刚与冯有翼在[25]，[26]中，他们用同以上诸作者不同的方法並在较一般的局部紧、可分距离状态空间上，进一步得到了一些存在不变测度的充要条件。

本节的目的主要是为了随机微分方程有界性研究的需要，介绍Miyahara的一些有关有界性与不变测度的存在性之间关系的结果。

考虑时齐Itô系统

$$dX(t)=b(X(t)dt+\sigma(X(t))dW(t), \qquad (6.38)$$

其中，$b(X)=(b_1(X),\ \cdots,\ b_l(X))^T$，$\sigma(X)=(\sigma_{ij}(X))_{l\times k}$

$W(t)$ 为 k 维标准 Wiener 过程

並假设$b(X)$，$\sigma(X)$满足 Lipschitz 连续的条件，显然(6.38)的解过程是一个齐次Feller过程。

定义6.4 过程 $X(t)$是称为$p(>0)$次终归有界的，如果存在一个常数$K>0$，使得对任一$X\in E_l$有

$$\lim_{t\to\infty}\sup E_X|X(t)|^p\leqslant K.$$

过程 $X(t)$不变测度的定义，见第3章§3.6中的定义。沿用上一章中有关符号，例如以C表示

$$C\triangleq\{f: f(\cdot): E_l\to E_1\text{的有界连续函数}\}$$

等。

定理6.11 如果系统(6.38)是 p 次终归有界的，则它存在有限的不变测度。

【证明】 对于给定的初态 $X(0)=X\in E_l$，则(6.38)的解过程 $X^X(t)$ 是一个齐次的 Feller 的过程。令

$$\Phi_N(f)=\frac{1}{N}\int_0^N T_t f(X)dt, \quad N=1,2,\cdots, \qquad (6.39)$$

则$\Phi_N(f)$为 C 上的线性泛函，其满足

(i) $\Phi_N(f)\geqslant 0$，如果$f\geqslant 0$。

(ii) $\Phi_N(1)=1$。

故Φ_N在E_l上定义了一个概率测度并以同样的符号$\Phi(\cdot)$记此测度。

下证族$\{\Phi_N, N=1,2,\cdots\}$是紧密的(tight)，即

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{N\to 0}\Phi_N(\bar{U}_k)=1, \tag{6.40}$$

其中 $\bar{U}_k=\{X: |X|\leqslant k\}$，$k=1,2,\cdots$

由设$X^x(t)$是p次终时有界的，则存在两个常数K和T，使得

$$E_X|X(t)|^p\leqslant K, \text{ 对于 } t\geqslant T.$$

利用Чебышев不等式及上不等式，有

$$P(t,X,\bar{U}_k')\leqslant K/k^p, \text{对于} t\geqslant T. \tag{6.41}$$

此不等式等价于

$$P(t,X,\bar{U}_k)\geqslant 1-K/k^p, \text{ 对于 } t\geqslant T. \tag{6.42}$$

于是，我们得到下列不等式：

$$\Phi_N(\bar{U}_k)\geqslant\frac{1}{N}\int_T^N P(t,X,\bar{U}_k)\,dt\geqslant\frac{1}{N}(N-T)(1-K/k^p)$$

$$\text{对于} N>T. \tag{6.43}$$

由此不等式，易知$\forall\varepsilon>0$，$\exists k_0(\varepsilon)>0, N_0(\varepsilon)>0$，使得

$$\Phi_N(\bar{U}_k)\geqslant 1-\varepsilon, \text{ 对于 } k\geqslant k_0 \text{ 且 } N\geqslant N_0. \tag{6.44}$$

因为$\Phi_N(\cdot)$是概率测度，从而存在一个$k_1(\varepsilon)>0$，使得

$$\Phi_N(\bar{U}_k)\geqslant 1-\varepsilon, \text{ 对于 } k\geqslant k_1 \text{ 且 } N=1,2,\cdots,N_0 \tag{6.45}$$

不等式(6.44)和(6.45)意味着(6.40)，即族$\{\Phi_N\}$，$N=1,2,\cdots$是紧密的。

由$\{\Phi_N, N=1,2,\cdots\}$的紧密性，可推得存在一概率测度$\Phi(\cdot)$和一个子序列$\{\Phi_{Nm}, m=1,2,\cdots\}$使得

$$\lim_{m\to\infty}\Phi_{N_m}(f)=\Phi(f),\quad 对于f\in C。\tag{6.46}$$

利用此不等式和 $f\in C$ 的有界性以及$T_tf\in C$，有

$$\Phi(T_tf)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\int_0^{N_m}T_{t+s}f(X)ds$$

$$=\lim_{m\to\infty}\Big[\frac{1}{N_m}\int_0^{N_m}T_sf(X)ds+\frac{1}{N_m}\Big(\int_{N_m}^{N_m+t}T_sf(X)ds$$

$$-\int_0^{T}T_sf(X)ds\Big)\Big]=\Phi(f),$$

$$对于f\in C，且t\geqslant 0。\tag{6.47}$$

此等式表明$\Phi(\cdot)$是过程$X^x(t)$的一个不变测度。 ▌

［注］ 由定理6.11的证明易知，系统(6.38)的不变测度不是唯一的，每个初态$X(o)=x$，决定一个不变测度.

另外，从实质上说来，过程 $X^x(t)$ 的不变测度 φ 的存在性，反映了过程 $X^x(t)$ 的轨道，绝大部分时间消耗在 E_l 中的充分大的球中的趋势. 更具体地说，不变测度 φ 存在的充要条件是对每具有光滑边界 ∂U 的非空有界开集 $U\subset E_l$ 有

$$E_x[\min\{t;\ X(t)\in\partial U\}]<\infty,$$

$$对于所有的X\in E_l。\tag{6.48}$$

如果(6.48)成立，则过程$X^x(t)$是正常返的.

即使不变测度 φ 存在，过程 $X(t)$ 也不一定具有予先指定阶数的有限矩，然而我们有下面的定理。

定理6.12 设过程 $X(t)$ 是 p 次终归有界的，因而存在一个有限不变测度φ，则有

$$\int_{E_l}|X|^p\varphi(dX)<\infty。$$

【证明】 令 $f(X)=|X|^p$且$f_n(X)=\chi_{[0,n]}(f(X))$。

我们注意$f_n(X)\in L^1(E_l,\varphi)$．由$p$次终归有界性的假设，则必存在一常数$K'$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup E_X f(X(t))\leqslant K',\quad 对任一X\in E_l.$$

利用对于具有不变测度的Markov过程的遍历定理（见[28]，p.388)，存在极限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}T_k f_n(X)=f_n^*(X),\quad (\varphi—a.e.)\qquad (6.49)$$

並且

$$E_\varphi f_n^*(X)=E_\varphi f_n(X),\qquad (6.50)$$

这里

$$T_k f_n(X)=\int_{E_l}fn(Y)P(k,X,dY);$$

$$E_\varphi f_n(X)=\int_{E_l}f_n(X)\varphi(dX).$$

由不等式$f_n(X)\leqslant f(X)$和p次终归有界性的假设，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}T_k f_n(X)\leqslant\lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}T_k f(X)\leqslant K',$$

$$对于任一X\in E_l.\qquad (6.51)$$

由(6.49)和(6.51)我们得到

$$f_n^*(X)\leqslant K'\quad (\phi—a.e.)$$

並由此不等式，我们有

$$E_\varphi f_n^*(X)\leqslant K'.\qquad (6.52)$$

(6.49)，(6.51)式以及$f_n(X)\uparrow f(X)\quad (n\to\infty)$，意味着

$$E_\varphi f(X)=\lim_{n\to\infty}E_\varphi f_n(X)=\lim_{n\to\infty}E_\varphi f_n^*(X)\leqslant K'.$$ ▌

推论6.13 如果$X(t)$是∞次终归有界的，则$X(t)$的

任一有限不变测度 φ 满足

$$E_\varphi|X|^p<\infty, \quad 对任一p>0.$$

§6.5 不变集的稳定性

在常微分方程稳定性理论中，由于存在这样的例子（最简单的例子就是"阻尼谐波振动"），系统是渐近稳定的，但不能用通常的方法去找出一个满足Ляпунов定理所有条件的Ляпунов函数。为此，在50年代初就引进了不变集概念，並建立了关于不变集稳定性的一些结果。

Хасьминский在他的著作（见第1章文献[1]）的第六章§7中，利用超过函数探讨过由算子

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+(b(X,t),\frac{\partial}{\partial X})+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(X,t),\frac{\partial}{\partial X})^2$$

所描述的Markov过程 $X(t)$ 的不变集的随机稳定性，建立了类似于定理2.21的关于不变集的随机稳定性定理。

Kushner[12]将常微中的关于不变集的稳定性定理（即所谓不变性定理）推广到了随机动态系统，证明了极限集为不变集的不变集定理以及关于不变集的稳定性定理。但他的不变集定理是在所谓条件组 (B_1)-(B_3) 下得到的，而其中条件 (B_2) 是比较强且不易验证的。钟瑚绵等[27]结合时齐 $\hat{\text{I}}$to 方程

$$dX(t)=b(X(t))dt+\sigma(X(t))dW(t),$$
$$X(0)=X_0$$

的解过程，对Kushner不变集定理的形式，假设条件及证明过程作了一些改进，在上面这些工作的基础上，戴建刚[28]利用另外的方法，仅在Kushner的条件 (B_1) 与 (B_2) 下，得到了

不变集定理，这样就大大简化了 Kushner 的证明，从而推广了Kushner的不变集定理．本节主要是介绍他的结果。

下面除惯用符号外，沿用Kushner[12]引进的一些概念与符号。

一、一些概念与符号

设（E，$\mathscr{B}$）为一个局部紧、可分、距离可测空间；$\{X(t),t\geqslant 0\}$是以$(E,\mathscr{B})$为状态空间，$P(t,X,A)$ $(A\in\mathscr{B})$为其转移函数的Markov过程。

$\mathscr{M}$表示$(E,\mathscr{B})$上的概率测度全体。

设$\varphi\in\mathscr{M}$，如果$P\{X(0)\in A\}=\varphi(A)$，$\forall A\in\mathscr{B}$，则称$\varphi$为过程$X(t)$的初始分布。

对$t>0,\varphi\in\mathscr{M}$，定义

$$m(t,\varphi,A)\triangleq\int_E P(t,X,A)\varphi(dX),\qquad 对\forall A\in\mathscr{B}.$$

则$m(t,\varphi,\cdot)\in\mathscr{M}$，且满足如下的半群性质：

$$m(t+s,\varphi,\cdot)=m(t,m(s,\varphi),\cdot),\quad t,s\geqslant 0 \tag{6.53}$$

定义6.5 概率测度族$N\subset\mathscr{M}$是称为**不变集**，如果对$\forall\psi\in N$，存在概率测度族：$\{m'(t,\psi,\cdot),t\in E_1\}$，使得对$\forall t\in E_1$，有

$$m'(t,\psi,\cdot)\in N,\quad m'(0,\psi)=\psi,$$

且对任何$t\geqslant 0$，$s\in E_1$，有

$$m(t,m'(s,\psi),\cdot)=m'(t+s,\psi,\cdot). \tag{6.54}$$

并称$\{m'(s,\psi,\cdot),s\in E_1\}$为满足初值$m'(0,\psi,\cdot)=\psi(\cdot)$，及方程(6.54)的一条轨道。

定义6.6 设$\{\psi_n, n\geqslant 1\}$为$\mathscr{M}$中的一个序列，$\psi\in\mathscr{M}$，如果对$\forall f\in C(E)$，有

$$\int_E f(X)\psi_n(dX)\longrightarrow\int_E f(X)\psi(dX),\qquad n\to\infty.$$

这里$C(E)$表示E上的有界连续函数的全体。

则称序列$\{\psi_n\}$弱收敛到ψ，并记为$\psi_n\xrightarrow{W}\psi$。

定义6.7 称$M\subset\mathscr{M}$是紧密的(fight)，如果对$\forall\varepsilon>0$，存在紧集$K\subset E$，使得

$$\psi(E\setminus K)<\varepsilon,\quad 对\forall\psi\in M成立.$$

称$M\subset\mathscr{M}$是相对紧的，如果对M中任一无穷子列都有弱收敛子列。

定义6.8 设$\varphi\in\mathscr{M}$，置

$W(\varphi)\triangleq\{\psi:\psi\in\mathscr{M},\exists\{t_n\},t_n\to\infty$且使得$m(t_n,\varphi,\cdot)\xrightarrow{W}\psi\}$ 则称$W(\varphi)$为$\{m(t,\varphi,\cdot)\}$，的ω **极限集**。

二、不变集定理

引理6.14 如果$M\subset\mathscr{M}$是紧密的，则M是相对紧的。

证明见[29]的定理1.1.4.

定理6.15（不变集定理） 设$\varphi\in\mathscr{M}$，如果

(i) 概率测度族$\{m(t,\varphi,\cdot),t\geqslant 0\}$是紧密的。

(ii) 对固定的$t\geqslant 0$，$\forall\psi\in W(\varphi)$，$\psi_n\in\mathscr{M}$，若$\psi_n\xrightarrow{W}\psi$，有

$$m(t,\psi_n,\cdot)\xrightarrow{W}m(t,\psi,\cdot)$$

则$W(\varphi)$是非空、紧密、相对自紧*的不变集。

【证明】 由条件(i)及引理6.14知$W(\varphi)$是非空的。现先

* 相对自紧即相对紧且包含所有极限点。

证$W(\varphi)$是紧密的，即$\forall\varepsilon>0$，∃紧集G_ε，使得

$$\psi(G_\varepsilon)>1-\varepsilon,\ \forall\psi\in W(\varphi).$$

由(i)知，$\forall\varepsilon>0$，∃紧集G_ε，使得

$$m(t,\varphi,E\setminus G_\varepsilon)<\varepsilon,\quad \forall t\geqslant 0.$$

任取$f(X)\in C(E)$，$0\leqslant f\leqslant 1$ $f|_{G_\varepsilon}=0$，则

$$\int_E f(X)m(t,\varphi,dX)\leqslant m(t,\varphi,E\setminus G_\varepsilon)<\varepsilon,\quad \forall t\geqslant 0.$$

任取$\psi\in W(\varphi)$，则∃$t_n\to\infty$，使得$m(t_n,\varphi)\xrightarrow{W}\psi$，从而

$$\int_E f(X)\psi(dX)<\varepsilon,$$

亦即

$$\int_{E\setminus G_\varepsilon} f(X)\psi(dX)\leqslant\varepsilon.$$ 因$E\setminus G_\varepsilon$是F_σ型集，故

$$E\setminus G_\varepsilon=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,$$

其中F_n是闭集，$F_n\subset F_{n+1}$，作$h_n(X)\in C(E)$，

$$h_n(X)=\begin{cases}0, & X\in G_\varepsilon,\\ 1, & X\in F_n,\end{cases}$$

$0\leqslant h_n\leqslant 1$，则$h_n$在$G_\varepsilon$上为0，且$h_n\to\chi_{E\setminus G_\varepsilon}$，$n\to\infty$，由有界控制收敛定理，

从$\int_{E\setminus G_\varepsilon}h_n(X)\psi(dX)\leqslant\varepsilon$，可得$\psi(E|G_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$，因此$W(\varphi)$是紧密的。

再证$W(\varphi)$是相对自紧的。任取$\{\psi_n\}\subset W(\varphi)$，由于$W(\varphi)$是紧密的，故存在弱收敛子列$\psi_{n'}\xrightarrow{W}\psi$。现证$\psi\in W(\varphi)$。对固定的$n'$，有$t_i(n')\uparrow\infty$ $(i\to\infty)$，使得$m(t_i(n'),\varphi)\xrightarrow{W}\psi_{n'}$，$i\to\infty$，且对固定的$i$，有$t_i(n'+1)>t_i(n')$，于是我们

有二重概率测度序列 $\{m(t_i(n'),\varphi),n'\geqslant 1,i\geqslant 1\}$：

$$
\begin{array}{l}
m(t_1(1),\varphi),\quad m(t_2(1),\varphi),\ \cdots\ ,m(t_i(1),\varphi),\ \cdots\ \xrightarrow{W}\psi_1 \\
m(t_1(2),\varphi),\quad m(t_2(2),\varphi),\ \cdots\ ,m(t_i(2),\varphi),\ \cdots\ \xrightarrow{W}\psi_2 \\
\quad\vdots \\
m(t_1(n')\varphi),\quad m(t_2(n'),\varphi),\cdots,m(t_i(n'),\varphi),\ \cdots\ \xrightarrow{W}\psi_{n'} \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow W \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \psi
\end{array}
$$

由[27]的引理4知，存在二重数列 $\{t_i(n')\}$ 的一个子列 $\{t_{lk}(k),k=1,2,\cdots\}$，$t_{lk}(k)\to\infty\quad(k\to\infty)$，使得 $m(t_{lk}(k),\varphi)\xrightarrow{W}\psi$，故 $\psi\in W(\varphi)$。

最后，我们来证明 $W(\varphi)$ 是个不变集。

任取 $\psi\in W(\varphi)$，因而据 $W(\varphi)$ 的定义，$\exists\, t_n\to\infty$，使得 $m(t_n,\varphi)\xrightarrow{W}\psi$，则一定存在 $\{t_n\}$ 的一个子列 $\{t_{nl}\}$，使得对任给的正整数 k，有

$$m(t_{nl}-k,\varphi,\cdot)\xrightarrow{W}\psi(k,\cdot),\qquad l\to\infty,$$

其中 $\psi(k,\cdot)$ 是 $W(\varphi)$ 的某个元素。

事实上，由于 $\{m(t_n-1,\varphi,\cdot)\}$ 是紧密族，故存在子列 $\{t_{n1}\}$ 使得 $m(t_{n1}-1,\varphi,\cdot)\xrightarrow{W}\psi(1,\cdot)$。又因为 $m(t_{n1}-2,\varphi)$ 紧密，存在 $\{t_{n2}\}\subset\{t_{n1}\}$，使得

$$m(t_{n2}-2,\varphi,\cdot)\xrightarrow{W}\psi(2,\cdot),\cdots,$$

存在 $\{t_{nk}\}$ 为 $\{t_{nk-1}\}$ 的子列，且

$$m(t_{n_l}-k,\varphi,\cdot)\xrightarrow{W}\psi(k,\cdot).$$

现对任一$t\in E_1$，取k使得$t+k>0$，再由(6.53)有

$$m(t_{n_l}+t,\varphi,\cdot)=m(t+k,m(t_{n_l}-k,\varphi),\cdot)^*,\quad \forall t_{n_l}>k.$$

由弱极限的唯一性知，$m(t+k,\psi(k),\cdot)$与k的选取无关，记作ψ，$\psi(t,\cdot)\triangleq m(t+k,\psi(k),\cdot)$，于是

$$m(t_{n_l}+t,\varphi,\cdot)\xrightarrow{W}\psi(t,\cdot)\quad l\to\infty.$$

对于$s\geqslant0,t\in E_1$，有

$$m(s,m(t_{n_l}+t,\varphi),\cdot)=m(t+s+t_{n_l},\varphi,\cdot).$$

令$l\to\infty$，则由(ii)有

$$m(s,\psi(t),\cdot)=\psi(t+s,\cdot).$$

显然$\psi(t,\cdot)\in W(\varphi)$，且$\psi(0)=\psi$，故$\{\psi(t),t\in E_1\}$是满足初值和方程(6.54)的一条轨道，由于$\psi\in W(\varphi)$是任意的，故$W(\varphi)$是不变集。∎

当过程具有Feller性质时，定理6.15的条件(ii)满足，事实上，我们有更进一步的

定理6.16 设$t\geqslant0$，则$\forall\varphi\in\mathscr{M}$及$\forall\mathscr{M}$中的序列$\{\varphi_n,n\geqslant1\}$，当$\varphi_n\xrightarrow{W}\varphi$时，有

$$m(t,\varphi_n)\xrightarrow{W}m(t,\varphi)$$

的充要条件为$\{X(t),t\geqslant0\}$是Feller过程。

【证明】 充分性。设$\{X(t),t\geqslant0\}$为Feller过程，$\{\varphi_n\}$是$\mathscr{M}$中的一个序列，$\varphi\in\mathscr{M}$，且$\varphi_n\xrightarrow{W}\varphi$，任取$f\in C(E)$及$t\geqslant0$，则$T_tf\in C(E)$，由

---

* 这里$m(t_{n_l}-k,\varphi)$是对$t_{n_l}\geqslant k$的l定义的。

$$\int_E f(X)m(t,\varphi_m,dX)$$

$$=\int_E\int_E f(X)P(t,Y,dX)\varphi_n(dY)$$

$$=\int_E T_tf(Y)\varphi_n(dY)\to\int_E T_tf(Y)\varphi(dY)$$

$$=\int_E f(X)m(t,\varphi,dX),$$

故

$$m(t,\varphi_n,\cdot)\xrightarrow{W}m(t,\varphi,\cdot).$$

必要性. 若$X(0)=X_0\in E$, $\{X(n),n\geqslant1\}\subset E$, 且$X(n)\to X_0$, 以$\varphi_n$表概率集中在点$X(n)$的概率分布, $n=0,1,2,\cdots$, 由$X(n)\to X_0$, $n\to\infty$, 可知$\varphi_n\xrightarrow{W}\varphi$, $n\to\infty$, 于是由(ii), 有

$$m(t,\varphi_n)\to m(t,\varphi).$$

设$f\in C(E)$, 由

$$\int_E f(X)m(t,\varphi_n,dX)$$

$$=\int_E T_tf(Y)\varphi_n(dY)=T_tf(X_n).$$

同样,

$$\int_E f(X)m(t,\varphi,dX)=T_tf(X),$$

从而$T_tf(X_n)\to T_tf(X)$, 这表明$T_tf\in C(E)$. ∎

三、不变集的稳定性

置$\rho(X,U)\triangleq\inf\limits_{X_0\in U}\|X-X_0\|$, 记为点$X$到集U的距离.

设$\psi\in\mathscr{M}$, 我们把使$\psi(G)=0$的最大开集G的余集定义为

ψ的支柱集並记为$S(\psi)$，它是一个闭集。定义$W(\varphi)$的支柱集为$S(W(\varphi))\triangleq\bigcup_{\psi\in W(\varphi)}S(\psi)$（注意，$S(W(\varphi))$未必是闭集）。利用不变集定理，我们有如下的定理，它表明过程本身关于不变集的一种稳定性质。

定理6.17 假设定理6.15的条件(i)成立，则$\{X(t), t\geqslant 0\}$收敛于$W(\varphi)$的支柱集的闭包，即$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}P_\varphi\{\rho(X(t), \overline{S(W(\varphi))})\geqslant\varepsilon\}=0.$$

【证明】 令$\overline{S(W(\varphi))}\triangleq C$，$U_\varepsilon(c)$表$C$的$\varepsilon$邻域，于是只需证：$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}P_\varphi\{X(t)\in E\setminus U_\varepsilon(c)\}=0 \tag{*}$$

因为(*)意味着定理的结论。

现设(*)不成立，即有某个$\varepsilon>0$，$\exists\varepsilon_0>0$，及$\{t_n\}\to\infty$，使得

$$P_\varphi\{X(t)\in E|\overline{U_\varepsilon(c)}\}\geqslant\varepsilon_0>0.$$

取$f\in C(E)$如下：

$$0\leqslant f\leqslant 1 \quad 且 \quad f(X)=\begin{cases}0, & X\in\overline{U_{\varepsilon/2}(c)};\\ 1, & X\in E|U_\varepsilon(c),\end{cases}$$

由于$\{m(t_n,\varphi)\}$是紧密的，故存在$\{t_n\}$的子列$\{t_n'\}$使得$m(t_n',\varphi)\xrightarrow{W}\psi\in W(\varphi)$，于是对上面的$f$，有

$$f[m(t_n',\varphi)]\to f[\psi(\cdot)],$$

然而

$$f[m(t_n',\varphi)]\geqslant\int_{\overline{U}_{\varepsilon/2}(c)}f(X)m(t_n',\varphi,dX)$$

$$+\int_{E\setminus U_\varepsilon(c)}f(X)m(t_n',\varphi,dX)$$

$$=0+m(t_n',\varphi,E|U_\varepsilon(c))$$

$$= P_\varphi[X(t_n') \in E | U_\varepsilon(c)]$$
$$\geqslant P_\varphi\{X(t_n') \in E | \overline{U_\varepsilon(c)}\}$$
$$\geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

从而 $f[\psi(\cdot)] \geqslant \varepsilon_0 > 0$，但 $f[\psi(\cdot)] \leqslant \psi(E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)})$，故由 $\psi(E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}) \geqslant \varepsilon_0 > 0$，知开集 $E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}$ 必含 $\psi(\cdot)$ 的支柱集中的某些点。若不然，对每个 $X \in E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}$ 都有邻域 $U(X)$，使得 $\psi(U(X)) = 0$，由 E 的可分性，在开集系 $\{U(X), X \in E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}\}$ 中必有可数多个 $U(X_1), U(X_2), \cdots$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U(X_i) = E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)},$$

于是

$$\psi(E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \psi(U(X_i)) = 0,$$

矛盾！因此 $E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}$ 中必含 $\psi(\cdot)$ 的支柱集中的某些点，但这与 C 的定义矛盾！

因为 $E \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(c)}$ 既含 $\psi(\cdot)$ 的支柱集中的某些点，但又与 C 不相交，因此 $(*)$ 必须成立。 ▇

〔注〕 此定理的证明属于kushner（见〔12〕的定理5(i)的证明）。

四、不变集与不变测度的联系

定理6.18 (i) 设 $\varphi \in \mathscr{M}$，如 $W(\varphi)$ 是不变集，且仅含一个测度 ψ，则 ψ 是不变测度。

(ii) 对 $\varphi \in \mathscr{M}$，如果存在 $t_0 > 0$，使得对 $\forall t \in [0, t_0]$，有 $\varphi = m(t, \varphi)$，则 ψ 是不变测度。

推论6.19 设定理 6.15 的条件(i)，(ii)成立，且对 $\forall X \in E$，当 $t \to \infty$ 时，有 $P(t, X, \cdot) \xrightarrow{W} \theta(X, \cdot)$，则

$$\psi(\cdot) \triangleq \int_E \theta(X, \cdot)\varphi(dX)$$

是个不变测度。

证明见[27]的定理3及其推论。

§6.6 系数为Markov过程的方程

在第1章中，我们已研究过系数含有一般随机过程的微分方程稳定性.有些作者（Kac与Krasovskii[1]，Frisch[14]以及其他人）考虑过形如

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, t, X(t)) \tag{6.55}$$

的方程所描述的系统的性质，这里Y，F均为E_m中的向量，并且$X(t)$是取值于E_l中的Markov过程。如果过程$X(t)$是由下列微分生成算子所描述的：

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(b(X, t), \frac{\partial}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(X, t), \frac{\partial}{\partial X}\right)^2.$$

显然偶对$(X(t), Y(t))$也是一个Markov过程，它关于充分光滑函数V的微分生成算子是定义为

$$L_1 V = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(F(Y, t, X), \frac{\partial V}{\partial Y}\right) + \left(b(X, t), \frac{\partial V}{\partial X}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(X, t), \frac{\partial}{\partial X}\right)^2 V.$$

于是，对于过程(6.55)的轨道$Y(t) \equiv 0$的稳定性研究（假设$F(0, t, X) \equiv 0$）化为$(l+m)$维Markov过程$(X(t), Y(t))$关于m维超平面$Y = 0$的稳定性的研究。因此，类似于定理2.21的证明方法，我们易得

定理 6.20 假设对于某个 $\varepsilon_0>0$ 和 $\forall\, t>0, |Y|<\varepsilon_0$，存在一个函数 $V(X,Y,t)$，其或许除去集 $Y=\{0\}$ 外，处处关于 t，$Y\in E_m$ 连续可微，关于 $X\in E_l$ 两次连续可微，並且使得

$$L_l V\leqslant 0,\quad V(X,0,t)=0,$$

$$\inf_{t>0,|Y|>\varepsilon} V(X,Y,t)=V_\varepsilon>0,\quad \text{对于} 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

则系统(6.55)的解 $Y\equiv 0$ 在下面意义下是随机稳定的。

$$\lim_{|Y|\to 0} P\{\sup_{t>0}|Y(t)|>\varepsilon;\ X(0)=X,\ Y(0)=Y\}=0.$$

至今所考虑的很多有意义的问题，都是形如方程(6.55)的简单情形。例如，我们可研究线性系统

$$\frac{dY}{dt}=F(X(t))\,Y \tag{6.56}$$

的随机稳定性。此问题有一个极简单的解，如果 $X(t)$ 是一个时齐的遍历过程，並且 $m=1$，则

$$y(t)=y(o)\exp\{\int_o^t F(X(s))ds\}. \tag{6.57}$$

因此，由强大数律推得（参考第3章），一旦

$$\bar{F}=\int_{E_l} F(X)\mu(dX)<0$$

成立，则过程 $Y(t)$ 是渐近稳定的。这里 μ 是过程 $X(t)$ 的平稳分布。

以同样的方法可证明：如果 $\bar{F}>0$，则系统(6.56)是不稳定的。

对于(6.56)型系统的 p 稳定性的条件是非常复杂的，即使在 $m=1$ 的情形也是如此。

事实上，由(6.57)推得

$$E\{|y(t)|^p|X(0)=X;\ y(0)=y\}$$

$$=|y|^p E_X \exp\{p\int_0^t F(X(s))ds\}.$$

如果 $X(t)$，例如是E_l中的时齐扩散过程，其具有局部特征：$b(X)$ 和 $\sigma_1(X)$，…，$\sigma_k(X)$，则正如我们所知道的(Dynkin[11])，函数

$$u(X,t)=E_X\exp\{p\int_0^t F(X(s))ds\}$$

是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(b(X),\frac{\partial u}{\partial X})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r(X),\frac{\partial}{\partial X})^2u+pF(X)u \qquad (6.58)$$

的一个解，其满足初值条件

$$u(X,0)=1.$$

于是当$m=1$时，系统(6.56)的 p 稳定性问题就化为问题(6.58)，(6.59)的解，当$t\to\infty$时的极限性态的研究。

如果 $m>1$，这就复杂了。Frisch[14] 引进了一个线性偏微分方程系统，解此系统，我们可利用求积去确定满足对于任意 m 的(6.56)的过程 $Y(t)$ 的矩。

具有有限多个状态的时齐 Markov 过程 $X(t)$ 的情形，已由 Кас 和 Красовский[1] 研究过。特别对于系统的均方稳定性，他们的文章给出了一个代数准则。

这一节中，我们仅对此问题加以评述，而未能在这里详细讨论。因此对此问题有兴趣的读者，可查阅相应的文献。

参考文献

1 Kac, I. Ja. and Krasovskii, N. N. On stability of systems with random parameters, Prikl. Math. Meh. 24, (1960) 809-823 = J. Appl. Math. Mech. 24, (1960) 1225-1246.

2 Gihman, I. I. Differential equations with random functions, Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Kiev. (1964) pp41-86 (Russian) MR., 31#6037.

3 Gihman, I. I. Stability of solutions of stochastic differential equations, Limit theorems statist. inference, Izdat. "Fan", Tashkent, (1966), pp. 14-45, English trasl., Selected Transl. Statist. and Probability vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1973) pp. 125-154, MR, 40#944.

4 Nevelson, M. B. and Hasminskii, R. Z. Stability of stochastic systems, Problems of Information Transmission 2 (1966) no. 3. 61-74. MR. 34#7233

5 Hasminskii, R. Z. Stability in the first approximation for stochastic systems. J. Appl. Math. Mech. 31. (1967) 1025-1030 MR. 37#6561.

6 Lyapunov, A. M. （见第一章文献［4］）.

7 Malkin, I. G. （见绪论文献［7］）.

8 Pinsky, V. M. Stochastic stability and dirichlet problem. Comm. Pure Appl. Math. 27, (1974), 311-350.

9 Bucy, R. S. Stability and positive supermartingales, J. Differential equations 1 (1965) 151-155, MR. 32#8414.

10 Hasminskii, R. Z. On equations with random perturbations Theor. Probability Appl. 10 (1965), 361-364.

11 Dynkin, E. B. （见第五章文献［14］）

12 Kushner, H. J. Stochastic stability, Lecture Notes in Math. 294, (1972), 97-124.

13 Gihman, I.I. and Dorogovčev, A.Ja. On stability of solutions of stochastic differential equations . Ukrain.Mat.Ž. 17 (1965) no.6, 3-21 . English transl. Amer.Math.Soc.Transl. (2) .72 (1968) 229-250 , MR.43# 6996 .

14 Frisch, U . Sur la resolution des equations differentielles stochastiques a coefficients markoviens , C.R. Acad.Sci.Paris, ser. A-B 262 (1966) A.762-A765 MR.33#2904 .

15 Harris, T.E. The existence of stationary measures for certain markoff processes . Proceedings of the third Berkeley Symposium on Math.Statist.Probab. vol.II (1956) 113-124 .

16 Foguel, S.R. Existence of invariant measuress for markov processes I . Proc.Math.Soc. 13 (1962) 833-838; ibid II . 17 (1966) 387-389 .

17 Beneš, V.E. Existance of finite invariant measures for markov processes . Proc. Amer.Math.Soc. 18 (1967) 1058-1061 .

18 Beneš, V.E. Finite regular invariant measures for feller processes . J.Appl.Probab. 5 (1968) 203-209

19 Sentilles, F.D. Existence of regular finite invariant measures., Proc.Amer.Math.Soc. 21, (1969), 318-320 .

20 钟琪绵， 紧距离空间上马氏过程的不变测度 .
3、(1982)，617—622 .

21 Beboutoff, M. Markov chain with a compact state space Matematicheskii Sbornik T.10 , 213-238 (1942) .

22 Zakai, M. A Lyapunov criterion for the existence of stationary probability distributions for systems perturbed by noise. SIAM. J. Control, 7, (1969) 390-397.

23 Zakai, M. Stationary probability measures for linear differential equations driven by white noise. J. diff. equs. 8 (1970) 27-33.

24 Miyahara, Y. Invariant measures of ultimately bounded stochastic processes. Nagoya Math. J. 49 (1973) 149-153.

25 蒋建刚，一类 Feller 过程不变概率测度的存在性
南京大学硕士学位论文 (1985).

26 冯有襄，测度的周期性、不变性的存在和应用，
南京大学硕士学位论文 (1985).

27 钟锡绵 俞中明，一类概率测度方程解的不变性及周期性，
南京大学学报（自然科学版） 4, (1979), 1—10

28 Yosida, K. Functional Analysis. Springer-Verlag (1965).

29 Stroock, D.W. and Varadhan, S.R.S. Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag, New York Inc., (1979).

索　引

一　画

二　画

三　画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画以上